This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

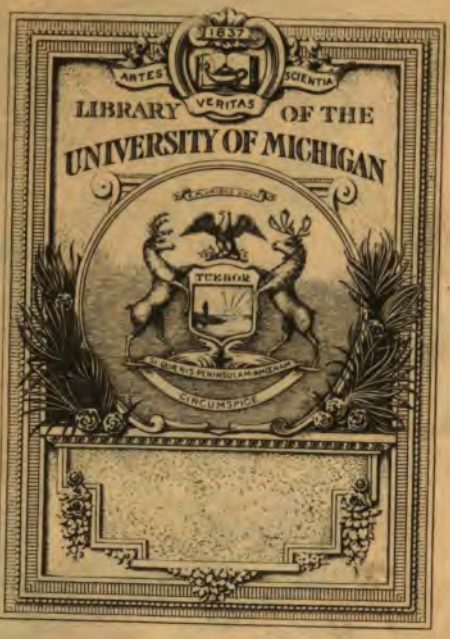
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

A 546934


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QH
35
.S26

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME IV.

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES.

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

TOME QUATRIEME.

A PARIS,

Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe, près de la rue Serpente.

MDCCLXXIV.

Avec Approbation, & Privilége du Roi.

Hist. des
Lafitte
2-10-28
16267

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

NOUS avons expliqué dans la section précédente les principes généraux du Calcul Intégral, nous allons maintenant en faire l'application à la Géométrie.

SECTION II.

Des usages du Calcul Intégral dans la Géométrie.

1°. Selon ce qu'on a dit vers le commencement de la section précédente, la différentielle de x^m est $mx^{m-1}dx$ & *son intégrale* x^m, *se trouve en augmentant l'exposant de* x *d'une unité, & en divisant par* dx, *& par cet exposant ainsi augmenté, c'est ce que nous appellerons la regle fon-*

damentale. La différentielle de $\frac{y}{x}$ eſt $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$ & $S\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{y}{x}$, $\frac{dx}{x}$ repréſente la différentielle du logarithme hyperbolique de x, ou la différentielle de L. x. de ſorte que $S.\,\frac{dx}{x} = Lx$. La différentielle de yx eſt $y\,dx + x\,dy$, & $S\,(y\,dx + x\,dy) = yx$ *. x & y peuvent repréſenter dans ces formules des variables quelconques, ſimples ou compoſées, comme on voudra ; donc ſi une différentielle peut ſe réduire par ſubſtitution à quelqu'une de ces formules générales de différentielles, on en trouvera tout d'un coup l'intégrale, en faiſant les mêmes ſubſtitutions dans l'intégrale commune de cette formule générale ; c'eſt ainſi qu'en comparant la différentielle $m u^n x^{m-1} dx + n x^m u^{n-1} du$ avec la formule de même eſpèce $y\,dx + x\,dy$, on trouve qu'en ſubſtituant u^n pour y & x^m pour x, elle ſe réduit à la différentielle propoſée **; d'où l'on conclud que faiſant les mêmes ſubſtitutions dans yx, intégrale de $y\,dx + x\,dy$, l'on aura $u^n x^m$, pour l'intégrale de la différentielle propoſée : on voit de même que $S.\,\frac{m u^n . z^{m-1} . dz + n z^m u^{n-1} du}{z^m . u^n} =$

* En reliſant les commencemens de la ſection précédente, on comprendra tout cela facilement.

** Car alors on doit ſubſtituer $m x^{m-1} dx$ pour dx & $n u^{n-1} du$ pour dy.

L. $t^m . u^n$. * : car en ſubſtituant $t^m . u^n$ au lieu de x la différentielle de $\frac{dx}{x}$ ſe réduit à la différentielle propoſée ; d'où l'on conclut qu'en ſubſtituant auſſi $t^m . u^n$. au lieu de x dans L. x, qui eſt l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, l'on aura L. $t^m . u^n$ pour l'intégrale de la différentielle propoſée ; mais ce moyen d'intégration qui eſt ſouvent utile, n'eſt pas toujours facile, parce qu'on n'a pas de méthode ſûre pour les choix des formules & pour les ſubſtitutions. Nous donnerons dans la ſuite d'autres méthodes.

On peut intégrer toute formule dont la quantité hors du ſigne (qui indique une puiſſance, ou une racine) eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne.

Par exemple, l'intégrale de $12\,a\,x^3 . dx \times (b + a\,x^4)^{\frac{1}{3}}$ eſt $= (b + a\,x^4)^{\frac{4}{3}}$: car en ſubſtituant $b + a\,x^4$ au lieu de x, $m - 1$ au lieu de 2 & $4\,a\,x^3\,dx$, au lieu de dx, m au lieu de 3, l'on aura $m\,x^{m-1}\,dx$ égale à la différentielle propoſée, & $x^m = (b + a\,x^4)^{\frac{4}{3}}$; c'eſt-à dire que dans ce cas on trouve l'intégrale en augmentant l'expoſant de la quantité ſous le ſigne d'une unité, & diviſant par cet expoſant & par la différentielle de la quantité ſous le ſigne.

* L déſigne le logarithme hyperbolique.

On peut intégrer algébriquement * ou par logarithmes, toute quantité binome ** de cette forme $a\,x^m.\,dx.\,(b+g.\,x^n)^r$, toutes les fois que p eſt un nombre entier poſitif. Car en élevant le binome à la puiſſance p l'on aura un nombre $p+1$ de termes qui étant multipliés par $a\,x^m.\,dx$ ſeront tous de cette forme $c\,x^r\,dx$, & ſeront tous intégrables algébriquement, ſi l'expoſant r eſt différent de -1, & par les logarithmes, lorſque cet expoſant ſera $=-1$. Si $p=2$, l'on aura $(b+g\,x^n)^p = b^2+2\,b\,g.\,x^n+g^2\,x^{2n}$. multipliant chacun des termes de cette quantité par $a\,x^m.\,dx$, on trouve $a\,b\,b\,x^m.\,dx+2\,b\,g\,a\,x^{m+n}\,dx+a\,g\,g\,x^{m+2n}\,dx$. L'intégrale du premier terme eſt, par la règle fondamentale, $\frac{a\,b\,b}{m+1}.\,x^{m+1}$ celle du ſecond terme eſt $\frac{2\,b\,g\,a}{m+n+1}.x^{m+n+1}$. Celle du troiſième qui, en faiſant $2n+m=r$ & $a\,g\,g=c$, devient $c\,x^r.\,dx$ ſera $\frac{c}{r+1}\,x^{r+1}$. Si $r=-1$, l'on a S. $c.\,x^r\,dx=$S $c\,x^{-1}\,dx$

* C'eſt-à-dire, trouver pour intégrale une expreſſion algébrique qui ne contienne ni logarithmes ni ſuites infinies, ni aucune quantité non algébrique.

** C'eſt-à-dire, dont la quantité complexe la plus compoſée eſt une puiſſance d'un binome.

$= S\, c\frac{dx}{x} = c\,L.x$. Si $a\,g\,g = c = 1$, l'on aura $\frac{c\,dx}{x} = \frac{dx}{x}$ & $S.\, c\frac{dx}{x} = L.x$. On voit bien aisément que si la quantité sous le signe étoit un trinome, un quadrinome, ou un polinome quelconque d'un nombre fini des termes & p un nombre entier positif en élevant le polynome à la puissance p & multipliant ensuite chacun des termes par $a\,x^m.\,dx$, l'on auroit une différentielle intégrable, puisque chacun des termes de cette différentielle seroit intégrable.

On peut intégrer toute quantité binome dont l'exposant de x hors du binome étant augmenté d'une unité est égal à l'exposant de x dans le binome quelque soit l'exposant p de la quantité sous le signe. Ainsi, si $m = n - 1$ l'on aura $a\,x^{n-1}.\,dx.\,(b + g\,x^n)^p$ (A) mais la différence de $b + g\,x^n$ est $= g\,n.\,x^{n-1}\,dx$. Augmentant d'une unité l'exposant n de la quantité sous le signe, divisant par la différentielle de la même quantité, & par l'exposant ainsi augmenté, l'on aura $S.\, a\,x^{n-1}.\,dx \times (b + g\,x^n.)^p = \frac{a}{g\,n.\,p + 1}.(b + g\,x^n)^{p+1}$

En effet, en différentiant cette quantité, l'on trouvera la différentielle A.

On peut intégrer toute différentielle binome dans laquelle l'exposant de la quantité hors du signe étant augmenté d'une unité, est divisible

par l'expoſant de la quantité ſous le ſigne, & donne un membre entier poſitif. Soit la différentielle $a\,x^{m\,n+n-1}.\,dx.\,(b+g\,x^n)^{\frac{1}{p}}$. Je fais $(b+g\,x^n)^{\frac{1}{p}} = z$, ou $b+g\,x^n = z^p$, ou $x^n = \frac{z^p-b}{g}$; donc $x^{n-1}.\,dx = \frac{1}{n.\,g\,p}.z^{\frac{1}{p}-1}\,dz$ & $x^{m.n+n-1} = (\frac{z^p-b}{g^m})^{\frac{1}{p}}$; or, $x^{m.n+n-1}\,dx = x^{m.n}\times x^{n-1}\,dx$; donc la différentielle propoſée deviendra (A) $= \frac{a}{n\,p\,g^{m+1}}.z^{\frac{1}{p}}.\,dz.\,(z^{\frac{1}{p}}-b)^m$.

Maintenant ſi $\frac{m\,n+n-1+1}{n} = \frac{m\,n+n}{n} = m+1$ eſt un nombre entier, m ſera un nombre entier, ou 0; ſi m eſt $= 0$, la quantité ſous le ſigne m ſera $= 1$, & $\int z^{\frac{1}{p}}.\,dz = \frac{z^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}$, étant multipliée par le facteur conſtant $\frac{a}{n\,p\,g}$, donnera l'intégrale cherchée exprimée en z, & ſubſtituant la valeur de $z = (b+g\,x^n)^p$, l'on aura l'intégrale exprimée en x. Si $m = 1$, ou 2, ou 3, &c. l'on aura facilement l'intégrale, parce qu'on pourra toujours élever la quantité ſous le ſigne

m, à la puiſſance m, & en général puiſque $m+1$ eſt le quotient de l'expoſant de x. hors du ſigne, en augmentant d'une unité, par l'expoſant de x ſous le ſigne, toutes les fois que $m+1$ ſera un nombre entier poſitif, $m+1-1=m$ ſera un nombre entier, ou 0, & la quantité ſous le ſigne m ſera $=1$, ou ſera réductible à un nombre fini de termes; donc on pourra toujours intégrer toute différentielle binome qui ſe trouvera dans ce cas. Si $m.n+n-1=n-1$, ou ſi $m=0$, l'on aura $x^{n-1}dx$, qui ſera la différentielle de la quantité ſous le ſigne à un multiplicateur conſtant près: donc toutes les fois que la quantité hors du ſigne eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne; à un multiplicateur conſtant près, la différentielle binome eſt intégrable.

Soit la différentielle $cx^2dx.(f^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$. Je vois qu'elle eſt intégrable, parce qu'en augmentant l'expoſant 3 de 1, j'ai 4 qui, diviſé par 2, donne un nombre entier & poſitif $=2$. Faiſant donc $(f^2+x^2)^{\frac{1}{3}}=z$, $f^2+x^2=z^3$, $g=1$, $b=f^2$, $2=n$, $\frac{1}{3}=p$, $c=a$, & ſubſtituant ces valeurs dans la transformée (A) ci-deſſus, l'on a $\frac{3c}{2}.z^3dz.\times(z^3-f^2)^1$; car ici $m+1=2$ & $m=1$, & négligeant le multiplicateur conſtant, l'on a $S.(z^6dz-f^2z^3dz)=S.z^6dz-S.f^2z^3dz=\frac{z^7}{7}-\frac{f^2}{4}z^4$. Mul-

tipliant cette quantité par $\frac{3c}{2}$, l'on a $\frac{3c}{14} \cdot z^7 - \frac{3c}{8} f^2 z^4 = \frac{3c}{14} (f^2 + x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{3c}{8} (f^2 + x^2)^{\frac{4}{2}}$, en substituant la valeur de z.

Il y a des différentielles qui ne paroissent pas se trouver dans le cas dont on vient de parler, & qui peuvent néanmoins y être ramenées en changeant l'exposant de la variable sous le signe de positif en négatif, ou de négatif en positif. Par exemple, la différentielle $dx.(b+xx)^{-\frac{3}{2}} = x^0.dx.(b+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ devient en divisant par x^2 dans le binome, & multipliant hors du binome par la quantité x^2 élevée à l'exposant $-\frac{3}{2}$ du signe, (voyez le calcul des radicaux, dans la premiere partie de cet ouvrage) x devient, dis-je, $x^{-3}\,dx.(1+\frac{b}{x^2})^{-\frac{3}{2}} = x^{-3}.dx.(1+bx^{-2})^{-\frac{3}{2}}$. Maintenant en augmentant -3 d'une unité, l'on a $-3+1=-2$. Or, divisant -2 par -2; le quotient 1 est un nombre entier positif; donc la différentielle proposée est intégrable.

Si x affectoit les deux termes du binome, il seroit facile de rendre un de ces termes entierement constant. Par exemple, si l'on avoit $x^3\,dx.(bx+gx^3)^2$, Je diviserois les deux termes du binome par x, & je multiplierois la quan-

tité hors du ſigne par le quarré de x, parce que x, ſous le ſigne 2, eſt égale à x^2, & j'aurois $x^5 . dx . (b + g x^2)^2$ qui eſt intégrable, puiſque $\frac{5+1}{2} = 3$.

REMARQUE. Lorſqu'une différentielle eſt affectée d'un multiplicateur ou d'un diviſeur conſtant, on peut en intégrant négliger le multiplicateur ou le diviſeur, pourvu qu'on le remette enſuite dans l'intégrale.

La différentielle $3 . (adx - xdx) . (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ eſt intégrable par la regle fondamentale, parce que la quantité hors du ſigne eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne, en multipliant cette différentielle par $\frac{3}{2}$; donc en augmentant d'une unité l'expoſant $\frac{1}{2}$, & diviſant par $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, & par $2adx - 2xdx$ (différentielle de la quantité ſous le ſigne), l'on aura l'intégrale cherchée $= (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. En général, quelque ſoit le polinome ſous le ſigne, on pourra toujours intégrer par la regle fondamentale, toutes les fois que la quantité hors du ſigne ſera la différentielle de la quantité ſous le ſigne, quand même cette différentielle ſeroit multipliée ou diviſée par une quantité conſtante. Ces principes ſuppoſés, appliquons le Calcul Intégral à la Géométrie. Nous commencerons par les Surfaces.

2. PROBLEME. *Trouver la différence des ſurfaces des courbes, en ſuppoſant les ordonnées perpendiculaires aux abciſſes.* Soit AP $= x$, PM $= y$, (Fig. 1ere.), Pp $=$ MR $= dx$, mR $= dy$, le rectangle PpMR eſt $= ydx$,

& le triangle $M\,m\,R = \frac{1}{2}\,dx.\,dy$; donc le tropeze $P\,p\,M\,m = y\,dx + \frac{1}{2}.\,dx.\,dy = y\,dx$: Car $\frac{1}{2}\,dx.\,dy$, infiniment petit du ſecond ordre, diſparoit devant $y\,dx$ infiniment petit du premier ; or le tropeze $P\,M\,m\,p$ eſt l'élément de la ſurface $A\,m\,p$; donc S. $y\,dx$ eſt égal à cette ſurface. Il ne s'agit donc que d'intégrer l'élément $y\,dx$.; pour cela on ſubſtituera dans cette formule la valeur de y exprimée par une fonction de x, priſe de l'équation de la courbe, comme on va le voir dans les exemples ſuivans.

Si $A\,M\,m$ eſt une ligne droite, l'on aura l'élément de l'aire d'un triangle.

3. PROBLEME. *Trouver l'aire d'un triangle* $A\,B\,C$ (Fig. 2.). Soit $A\,D = a$ la hauteur du triangle, ſa baſe $B\,C = b$, l'abciſſe $AP = x$, l'ordonnée $M\,m$ parallele à la baſe $= y$; en ſuppoſant une autre ordonnée $N\,n$ infiniment proche l'élément de l'aire ſera $= y\,dx = m\,n\,M\,N$. en faiſant $P\,p = dx$, les triangles ſemblables $A\,B\,C$, $A\,M\,m$ ayant leurs hauteurs proportionnelles à leurs baſes, l'on a $AD = a : BC = b :: AP = x : Mm = y = \frac{bx}{a}$;

donc $y\,dx = \frac{bx\,dx}{a}$ & S. $y\,dx = \frac{bx^2}{2a}$.

Si $A\,P$ devient $= A\,D$, l'on aura $x = a$, & l'aire du triangle $= \frac{b\,a\,a}{2a} = \frac{b}{2}a$; c'eſt-à-dire l'aire d'un triangle eſt égal au produit de la moitié de ſa baſe par ſa hauteur, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la Géométrie.

4. PROBLEME. *Trouver la ſurface d'une Parabole ordinaire* A M. (Fig. 1ere.) Par la nature de la courbe, l'on a $y^2 = p\,x$, $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc $S.\, y\,dx = S.\, p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.\, y\,x$: c'eſt-à-dire que l'aire d'une demie Parabole A M P eſt égale aux deux tiers du produit de l'ordonnée & de l'abciſſe.

COROLLAIRE. Donc l'eſpace extérieur BAM $= y\,x - \frac{2}{3}.\, y.\, x = \frac{1}{3}.\, y.\, x$.

5. PROBLEME. *Trouver l'eſpace a. g M P, compris entre deux ordonnées paraboliques.* Soit A $a = a$, $a\,g = b$, $a\,P = x$, l'élément de cet eſpace ſera $= y\,dx$; mais à cauſe de A P $= a + x$, l'on aura $y^2 = p\,(a+x)$, $y = p^{\frac{1}{2}}.\,(a+x)^{\frac{1}{2}}$ & $S.\, y\,dx = S.\, p^{\frac{1}{2}} \times (a+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\,p^{\frac{1}{2}}}{3}.\,(a+x)^{\frac{3}{2}}$ (par la regle fondamentale (1)) $= \frac{2}{3}.\, p^{\frac{1}{2}} (a+x)^{\frac{1}{2}} \times (a+x)$. Nous avons dit, dans la ſection précédente, qu'il falloit ajoûter une conſtante à l'intégrale. Si nous faiſons cette conſtante $= C$, l'on aura $\frac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}}\,(a+x)^{\frac{3}{2}} (a+x) + C$ (B) pour l'intégrale complette. Pour déterminer la conſtante C, je remarque que lorſque $x = 0$, l'eſpace $a\,g$ M P eſt $= 0$, & dans ce cas l'intégrale B devient $= \frac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} + C$ qui doit être $= 0$;

donc $\frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + C = o$, ou $C = o - \frac{2}{5} . p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$; donc l'aire cherchée est $= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} (a + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$. En effet $\frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} . (a + x)^{\frac{3}{2}}$ exprime l'aire entiere A P M, tandis qu'on demande cette aire moins l'aire A ga; or l'aire $agA = \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} a = \frac{2}{5} b . a.$, puiſqu'en faiſant $aA = x$, l'on auroit $ag = b = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$.

En général pour trouver la conſtante C qu'on doit ajoûter à l'intégrale, on fera $x = o$; ſi alors par la nature de la queſtion l'intégrale doit être $= o$, & qu'elle ſoit effectivement $= o$, l'on aura $C = o$; ainſi dans le troiſieme Problême l'aire parabolique a été trouvé $= \frac{2}{3} y x$, qui en faiſant $x = o$, devient $= o$; donc $C = o$.

Si l'intégrale doit être $= B$. lorſque $x = o$, la conſtante qu'on doit ajoûter, doit rendre cette intégrale $= B$; c'eſt à-dire que ſi l'intégrale eſt $B + D$, l'on doit avoir $B + D + C = B$, ou $D + C = o$, ou $C = - D$. Si l'on avoit $B - D$ pour intégrale, l'on auroit $B - D + C = B$, ou $- D + C = o$, ou $C = + D$; *donc la conſtante C qu'on doit ajoûter, eſt égale à la différence de l'intégrale que l'on a dans la ſuppoſition de $x = o$, avec celle qu'on doit avoir dans cette même ſuppoſition, en prenant cette différence avec un ſigne contraire.*

Dans l'exemple ci-deſſus, lorſque $x = 0$, l'on doit avoir l'intégrale $B = 0$, tandis que l'on a $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$; donc $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$.

Si dans la ſuppoſition de $x = b$, l'intégrale devoit être $= B$, & qu'elle fût $= B \pm D$, l'on auroit $B \pm D + C = B$, ou $C = \mp D$. Ainſi la conſtante C ſe trouve auſſi en prenant avec un ſigne contraire la différence de l'intégrale que l'on a en ſuppoſant $x = b$ avec celle que l'on doit avoir dans la même ſuppoſition; lorſque C devra être $= 0$, on n'en fera pas mention.

6. PROBLEME. *Quarrer* * *toutes les courbes dont l'équation eſt* $y a^{m-1} = x^m$, *& qui peut repréſenter les paraboles & les hyperboles de tous les genres, entre leurs aſſymptotes.* L'on a $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$, S. $y\,dx$ = S. $\frac{x^m}{a^{m-1}}$. $dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,a^{m-1}}$. donc s'il s'agit des paraboles, & que l'eſpace commence à l'origine des x, en faiſant $x = 0$, l'on a $\frac{x^{m+1}}{(m+1)\,a^{m-1}} = 0$, ce qui doit être; dans ce cas la conſtante C eſt $= 0$. Si m eſt négatif, ce qui arrive dans les hyper-

* Quarrer & trouver la ſurface ſont ici des termes ſynonymes.

boles de tous les genres *, l'on a $\frac{x^{-m+1}}{(m+1)a^{-m-1}}$ $= \frac{a^{m+1}.x^{-m+1}}{-m+1}$. Si A P $= x = o$ (*Fig. 4.*), en supposant $m < 1$, l'aire sera $= o$. Si l'aire commence au point P, auquel on suppose $x =$ A P $= b$, l'aire P M S R doit s'évanouir, lorsque $x = b$; donc alors $\frac{a^{m+1}b^{-m+1}}{1-m} + C = o$, ou $C = \frac{-a^{m+1}b^{-m+1}}{1-m}$, & l'aire est alors $= \frac{a^{m+1}.x^{-m+1}}{1-m} - \frac{a^{m+1}b^{-m+1}}{1-m}$.

On peut remarquer que dans cette hyperbole, l'espace infiniment long A B F M P. situé du côté de l'asymptote A B est fini, & l'espace situé du côté de R est infini. Car en supposant $x = b$, cet espace est $= \frac{a.^{m+1}.b^{c}}{c}$ (en faisant $1 - m = c$) quantité finie ; mais en supposant $x = \infty$, cet espace est $= \frac{a.^{m+1}\infty^{c}}{c}$ cela vient de ce que la courbe s'approche plus

* Car alors on a $y.a^{-m-1} = x^{-m}$, ou $\frac{y}{a^{m+1}} = \frac{1}{x^{m}}$ ou $y.x^{m} = a^{m+1}$ équation qui peut représenter toutes les hyperboles entre leurs asymptotes.

rapidement de l'aſſymptote A B que de l'aſſymptote A R : pour le faire concevoir, ſupoſons $a = 1$ & $m = -\frac{1}{3}$, $m + 1$ ſera $= \frac{2}{3}$. & l'équation ſera $y \cdot 1 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; donc les ordonnées P M = A D ſont en raiſon inverſe des racines cubes des x, ou de $\sqrt[3]{x}$ donc les D M = A P qui déſignent les ordonnées par rapport à l'aſſymptote A B, ſont en raiſon inverſe des cubes des abciſſes A D = y. Au contraire s'il s'agit de l'aſſymptote A R, l'on a P M = $y = \frac{3}{2}L\sqrt[3]{x}$; la courbe s'approche donc plus rapidement d'une des aſſymptotes que de l'autre, & cela arrive auſſi dans toutes les hyperboles, excepté l'hyperbole ordinaire.

Si $m > 1$; on pourra exprimer l'intégrale en ajoûtant une conſtante de cette maniere; $C - \frac{a^{m+1}}{(m-1).x^{m-1}}$. Si cette intégrale doit s'évanouir en faiſant $x = 0$, l'on aura $C = \frac{a^{m+1}}{(m-1).0^{m-1}} = \infty$. Cela arrive ainſi parce que l'eſpace du côté de B eſt infini. Pour que l'intégration ne ſoit point fruſtrée, on ſupoſera une abciſſe A P ſi petite que l'on voudra $= b$; & c'eſt de l'ordonnée correſpondante P M, qu'il faut commencer à compter l'eſpace P M S R; dans ce cas cet eſpace ſera

$= o$, lorſque $x = b$; donc $C = \frac{a^{m+1}}{(m-1).b^{m-1}}$, & l'aire $PMSR = \frac{a^{m+1}}{(m-1)b^{m-1}} - \frac{a^{m+1}}{(m-1)x^{m-1}}$.

Si $x = \infty$, le dernier terme diſparoit, & l'on a l'eſpace infiniment long $PMSR = \frac{a^{m+1}}{(m-1).b^{m-1}}$; & parce que en prenant les abciſſes ſur une des aſſymptotes, l'on a dans toutes les hyperboles, excepté les vulgaires ; $m < 1$, & en les prenant ſur l'autre, l'on a $m > 1$, un des eſpaces aſſymptotiques ſera fini & l'autre infini, comme on l'a déjà dit.

7. PROBLEME. *Quarrer l'hyperbole équilatere entre ſes aſſymptotes.* Quoiqu'on ait déjà réſolu ce probleme, en réſolvant le précédent, nous croyons devoir le réſoudre d'une autre maniere ; ſoit $y x = a a$ l'équation de la courbe, l'on aura, en faiſant $a = 1$, $y x = 1$, $y = \frac{1}{x}$, $S.y\,dx = S.\frac{dx}{x} = L.x$, & ajoûtant une conſtante, l'on a $L.x + C.$ pour l'aire B A R S F qui doit être $= o$, lorſque $x = o$, donc $C + L \cdot o = o$, ou $C = -L \cdot o$; donc l'aire cherchée $= L \cdot x - L \cdot o = L \cdot \frac{x}{o}$ (car par la nature des logarithmes, le logarithme du quotient eſt égal au logarithme du dividende moins celui du diviſeur) ; ainſi en faiſant $x = b = AP$, l'eſpace APMFB ſera infini, en conſidérant o comme une quantité infiniment

infiniment petite & ſuppoſant b finie quoique extremement petite.

On peut voir par-là que les logarithmes hyperboliques tirent leur origine d'une hyperbole équilatere dans laquelle la puiſſance $a\,a$ ſeroit $= 1$.

8. PROBLEME. *Trouver l'aire* P M R S *compriſe entre deux ordonnées aſſymptotiques* P M, R S. Soit A P $= b$, P R $= x$, R S $= y$, par la nature de l'hyperbole équilatere, en faiſant $aa = 1$, l'on a $y \times (b + x) = a^2 = 1$, $y = \frac{aa}{b+x}$, S. $y\,dx$ = S. $\frac{aa\,dx}{b+x} = aa$. L. $(b + x)$ = L. $(b + x) +$ C, en ajoûtant une conſtante, & parce que en faiſant $x = 0$, l'aire cherchée doit être $= 0$, l'on a L. $b +$ C $= 0$, C $=$ — L. b; donc l'aire cherchée eſt $=$ L. $(b + x)$ — L. b. Si $x = b$, l'on aura l'aire cherchée $=$ L. $2b$ — L. b = L $\frac{2b}{b}$ = L. 2. Si $x = 3\,b$, l'on a L. $(b + x)$ = L. $4\,b$ — log. b, & l'aire P M R S = L. $\frac{4b}{b}$, & en ſuppoſant ſucceſſivement $x = b$, $3\,b$, $7\,b$, &c., ou les abciſſes A P $= b$, A R $= 2\,b$, A $r = 4\,b$, A $t = 8\,b$; &c. En progreſſion géométrique, les aires P M S R, P M $ſ\,r$, &c. ou L. 2, L. 4, L. 8, &c. ſeront en progreſſion arithmétique *. Et ſi l'on fait $b = 1$,

* Par la nature des logarithmes, les quantités en progreſſion géométrique, ont leurs logarithmes en progreſſion arithmétique.

l'on aura la progreſſion L. 1, L. 4, L. 8, &c. $=$ 0, L. 2, L. 4, L. 8, &c.; car L. 1 $=$ 0; c'eſt-à-dire que le logarithme de A P eſt $=$ 0, ou, ce qui revient au même, que les logarithmes hyperboliques commencent au point P, auquel $x = 0$.

Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, le ſecteur A M S eſt égal à l'aire P M R S; donc on peut prendre les ſecteurs M A S, M A f, &c. pour les aires correſpondantes ou pour les logarithmes des abciſſes A R, A r, &c. De plus, ſelon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, (voyez les progreſſions géométriques) ſi pluſieurs quantités A P, A R, &c. ou 1, 2, 4, 8, &c. ſont en progreſſion géométrique; leurs différences P R, R r, rt, &c. formeront une progreſſion géométrique $\therefore$ 1 : 2 : 4 : 8, &c. & les différences P M R S, R S fr, &c. des aires, ou les aires correſpondantes ſeront égales; car L 2 $-$ 0 $=$ L 2 $=$ L 4 $-$ L 2 $=$ L $\frac{4}{2}$ $=$ L 2, L 8 $-$ L 4 $=$ L $\frac{8}{4}$ $=$ L 2, &c.; donc auſſi les ſecteurs correſpondans M A S, S A f, &c. ſeront égaux entr'eux; mais l'aire P M R S eſt finie; donc puiſqu'on peut prendre une infinité de lignes P R, R r, &c. en progreſſion géométrique, il pourra y avoir une infinité d'aires finies aſſymptotiques; donc l'aire entiere P M u m à l'infini ſera infinie.

REMARQUE. On peut intégrer $\frac{aadx}{b+x} =$ $aa \cdot (b+x)^{-1} \cdot dx$, en réſolvant $(b+x)^{-1}$.

en une série par la formule de Newton, en faisant $m = -1$, & l'on aura $\frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{b^2} + \frac{aax^2dx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$, &c. dont l'intégrale $= \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{2b^2} + \frac{aax^3}{3b^3} -$ &c.

La solution du Probleme précédent peut servir à faire trouver une logarithmique dont la sous-tangente soit égale à une ligne donnée b.

9. PROBLEME. *Décrire la logarithmique dont la sous-tangente* $= b$. (Fig. 5.) Je cherche l'aire PMRS, en supposant $x = b = 1$ (Fig. 4.), ou je cherche le logarithme hyperbolique de 2, par la méthode du N°. 24. de la section précédente. Je multiplie cette aire qu'on peut du moins avoir aussi approchée que l'on veut par aa, & je divise le produit par b. De sorte que si cette aire est $= c$, lon aura $\frac{aac}{b} = \frac{c}{b}$, en faisant $a = 1$. Maintenant je fais AP (Fig. 4.) $= b$, & ayant tiré une ligne indéfinie AR (Fig. 5.), sur cette ligne, j'éleve perpendiculairement AM $= b$. Je prends les abciſſes AR, Ar, &c. en progreſſion arithmétique, de maniere que, l'origine des abciſſes étant en A, l'on ait l'abciſſe AR égale à l'aire diviſée par b, ou $x =$

$Rr = AR = \frac{c}{b}$, &c. * ou $Ar = \frac{2c}{b}$, &c. & les ordonnées $AM = b$, $RS = 2b$, $rf = 4b$, &c. en progreſſion géométrique ou égales aux abciſſes AP, AR, &c. (Fig. 4.). Cela poſé, il eſt viſible que les abciſſes AR, Ar, (Fig. 5.) ſont les logarithmes des ordonnées correſpondantes, & que le logarithme de l'ordonnée AM $= b$ eſt $= 0$, parce que l'origine des x eſt au point A. D'autre côté, les logarithmes des ordonnées a m plus petites que b, qu'on peut ſuppoſer $= 1$, (car l'unité eſt arbitraire) ſont négatifs; c'eſt-à-dire que les logarithmes $x = Aa$, (Fig. 5.) pris à la gauche de AM, ſont négatifs. De plus, en ſuppoſant la ſous-tangente $= b$, l'on a, ſelon ce qu'on a vu ſection précédente (22), l'intégrale S. $\frac{dy}{y}$ égale au logarithme de y, diviſé par la ſous-tangente de la logarithmique dans laquelle on prend ce logarithme. En faiſant ce logarithme $= x$, l'on aura $\frac{x}{b} = S. \frac{dy}{y}$, ou $x = b S. \frac{dy}{y}$; mais (Fig. 5.) $RS = AR$ (dans la

* En exprimant l'aire c par un nombre, on concevra facilement comment l'on peut avoir $x = \frac{c}{b}$ & même $x = b$.

Fig. 4.) $= b + x$ & $dLy = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{b+x}$; donc les x (Fig. 5.) ſont égaux aux produits de b par les aires hyperboliques $c = S.\frac{dx}{b+x}$ (en ſuppoſant $a = 1$) multipliées par b; donc les $\frac{x}{b}$ ſont égales à ces aires, ou ſont les logarithmes $S.\frac{dy}{y}$ des ordonnées correſpondantes; donc parce qu'on a dit ci-deſſus (ſection précédente 22.) b eſt la ſous-tangente de la logarithmique dont on vient de parler.

10. PROBLEME. *Quarrer la logarithmique de la Figure* (5). La ſous-tangente de la logarithmique étant conſtante, l'on a $\frac{y\,dx}{dy} = b$; donc $y\,dx = b\,dy$, $Sy\,dx = bSdy = by$; donc en faiſant PN $= y$, l'eſpace infiniment long PN ma ſera égal au rectangle de PN par la ſous-tangente b. Par la même raiſon, en ſuppoſant RS $= z$, l'eſpace infiniment long SmRa ſera $= b.z$; donc l'eſpace SRPN $= by - bz = b.(y - z)$; c'eſt-à-dire l'eſpace logarithmique compris entre deux ordonnées, eſt égal au produit de la ſous-tangente par la différence des ordonnées.

11. PROBLEME. *Quarrer la courbe dont l'équation eſt* $y = a + bx + Cx^2 + fx^3$. L'on aura $S.y\,dx = S.(a\,dx + b\,x\,dx + Cx^2\,dx + fx^3\,dx) = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{fx^6}{6}$.

12. PROBLEME. *Quarrer la courbe de l'équation* $y = a + bx^m + cx^n + Dx^f, m, n, f,$ *étant des nombres positifs.* L'on aura S. $y\,dx =$ S. $(a\,dx + bx^m\,dx + cx^n\,dx + Dx^f\,dx)$ $= ax + \frac{b\,x^{m+1}}{m+1} + \frac{c\,x^{n+1}}{n+1} + \frac{D\,x^{f+1}}{f+1}$.

13. PROBLEME. *Quarrer la tractrice.* Si l'on conçoit que l'extrémité T d'un fil, ſe meut le long d'une ligne infinie B T, (Fig. 6.) tandis que ſon extrémité M traîne un corps M, ce corps décrira ſur un plan horiſontal la courbe A M qu'on appelle tractrice. Pour cette raiſon cette courbe aura deux branches, car le point T peut ſe mouvoir également de B vers T, ou de B vers D. De plus, le fil M T que je ſuppoſe $= a$, ſera partout une tangente de la courbe; ainſi la tangente de cette courbe eſt conſtante & $= a$, comme on l'a dit dans la ſection précédente (34). Il eſt viſible que la plus grande ordonnée A B eſt $=$ M T $= a$. Qu'on mene les lignes infiniment proches L P, N p, perpendiculaires à la ligne D T, & faiſons B P $=$ F M $= y$, L M $=$ A F $= x$, & ſuppoſant tirées les lignes que repréſente la figure, l'on aura R $m = dy$, M R $= dx$, P M $= a - x$, $\overline{MT}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{PT}^2$, $= aa - (a - x)^2$ $= 2ax - xx$, ou P T $= \sqrt{(2ax - xx)}$; mais à cauſe des triangles ſemblables P M T, M R m, l'on a $dx : dy :: a - x : \sqrt{(2a - xx)}$; ou $dy \cdot (a - x) = dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)}$. Si du centre B avec le rayon a l'on décrit un quart de cercle A D, l'élément F f n u de

ce quart de cercle, ſera $= f F . f u = dx\sqrt{(2ax - xx)}$,* tandis que l'élément P p R m de la tractrice eſt égal à $dy.(a - x)$; donc en faiſant $x = a$, l'eſpace infiniment long B T m A, compris entre la tractrice & ſon aſſymptote B T eſt égal à un quart de cercle dont le rayon eſt égal à la tangente de la tractrice.

COROLLAIRE. Si l'on fait $PM = y$, $BP = x$, l'on aura $\overline{MT}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{PT}^2 = aa - y^2$, $PT = \sqrt{(aa - yy)}$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. mais à cauſe des triangles ſemblables M m R, M P T, l'on a $MP\ (y) : PT = \sqrt{(aa - yy)} :: -dy$ ** $: dx = \frac{-dy\sqrt{(aa - yy)}}{y}$ qui eſt l'équation de la courbe telle qu'on l'a donnée dans la ſection précédente (34.).

14. PROBLEME. *Quarrer le cercle.* Soit A D C un quart de cercle, (Fig. 3.) dont le diametre $= a$, l'abciſſe A P $= x$, & l'ordonnée P M $= y$. Par la nature du cercle, l'on a $y = \sqrt{(ax - xx)}$, S. $y\,dx$ = S. $dx.\sqrt{(ax - xx)}$ = S. $dx.\sqrt{x}.\sqrt{(a - x)}$. Réſolvant $\sqrt{(a - x)} = (a - x)^{\frac{1}{2}}$

* car l'ordonnée de ce quart de cercle eſt $= \sqrt{(2ax - xx)}$.

** $-dy$ a le ſigne $-$ parce y diminue lorſque x augmente. Si l'on fait mouvoir le point T vers la gauche en allant de B vers D, on décrira une autre branche égale & ſemblable à la premiere. Si, parce que P T eſt ſituée à la gauche de P M, on vouloit prendre le radical avec le ſigne $-$, le ſecond membre de l'équation auroit le ſigne $+$. S.

en une série par le binome de Newton, & multipliant tous les termes de la série par $x^{\frac{1}{2}} dx$, l'on aura $dx \cdot \sqrt{(ax - xx)} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}}$, &c. $= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{1.2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{1.2.4a^{\frac{3}{2}}}$ — &c. dont l'intégrale $= \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{7}{2}}}{4.7.a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3x^{\frac{9}{2}}}{4.6.9a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^{\frac{11}{2}}}{4.6.8.11a^{\frac{7}{2}}}$, &c. Si l'on fait $x = \frac{1}{2}a$, l'on aura le quart de cercle A D C, dont le quadruple donnera le cercle entier; si le diametre étoit $2a$, l'on auroit $S.y\,dx = S.dx\sqrt{(2ax - xx)}$.

AUTRE MANIERE. Si l'on fait le rayon $= a$, & que l'on compte les abciſſes C P du centre, l'on aura $y = \sqrt{(aa - xx)}$ & $S.y\,dx = S.dx\sqrt{(aa - xx)}$ = C D P M; réſolvant en série $\sqrt{(aa - xx)}$ multipliant par dx, & intégrant, il vient $S.dx \cdot \sqrt{(aa - xx)} = ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5}$ — &c.

Si l'on fait C P = C A = a, l'on aura le quart de cercle C D A $= aa - \frac{aa}{2.3} - \frac{1.a^2}{2.4.5}$, &c.

AUTREMENT. Soit la tangente $At = x$; ayant mené les sécantes Ct, CT infiniment proches, & du centre C décrit l'arc ts, qu'on pourra regarder comme une ligne droite perpendiculaire sur CT, l'on aura $tT = dx$ & les triangles Ttf, CTA, ou CtA (car les angles CTA, CtA peuvent être regardés comme égaux) seront semblables, aussi bien que les triangles Cts, Cri; donc en faisant $AC = a$, l'on aura $Ct = \sqrt{(aa + xx)} : CA = a :: Tt = dx : ts = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$: l'on aura aussi $Ct : Ci :: ts : ri$, ou $\sqrt{(a^2 + x^2)} : a :: \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa+xx)}} : ri = \frac{a^2\,dx}{aa + xx} = a^2\,dx\,.\,(aa + xx)^{-1}$. Multipliant cette quantité par $\frac{Cr}{2} = \frac{a}{2}$, l'on aura le secteur élémentaire $Cir = \frac{dx}{2}\,a^3 \times (aa + xx)^{-1}$. Résolvant en série $(aa + xx)^{-1}$, multipliant tous les termes par $\frac{dx}{2}\,a^3$, on trouve le secteur $CAr = S.\frac{a^3\,dx}{2\,(aa + xx)} = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10.a^3} - \frac{x^7}{14.a^5}$, &c. Si l'on fait $AT = a$; c'est-à-dire, si l'arc Ar est

de 45°. *, l'on aura le secteur $CAr = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14} + \frac{aa}{18}$, &c ; & en multipliant tous les termes par 8, l'on aura l'aire du cercle entier.

15. PROBLEME. *Quarrer la cicloïde.* (Fig. 7). Soit $Pn = y$, l'on aura $ir = ns = dy$, & faisant le diametre DC du cercle générateur $= a$, $DP = x$, l'on aura $PM = \sqrt{(ax - xx)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, (section précédente 13), la corde DM est parallele à la tangente Tn de la cicloïde ; donc les triangles DMP, nis ** sont semblables & donnent $DP : PM :: nr = Pp = dx : ri = ns$, ou $x : \sqrt{(ax - xx)} :: dx : ns = \frac{dx\sqrt{(ax - xx)}}{x}$. Si l'on multiplie ns par $Ln = x$, l'on aura l'élément $Lnsf$ de l'espace extérieur $AFD = dx\sqrt{(ax - xx)}$; or cet élément est celui d'un demi-cercle dont le diametre $= a$; donc l'espace extérieur AFD est égal au demi-cercle générateur ; mais l'espace entier AFDC est égal au produit de AC par DC, ou de la demi-circonférence du cercle générateur par son diametre, ou est $= a.b$, en faisant la demi-circonférence du cercle générateur $= b$, tandis que le demi-cercle générateur est $= \frac{a.b}{4}$;

* La tangente de 45°. est égale au rayon, comme on l'a dit dans la Trigonométrie.

** On peut regarder l'arc nis comme le prolongement de la tangente Tn.

donc l'eſpace cicloïdal A D C $= \frac{1}{4} . a . b$; c'eſt-à-dire, la demi cicloïde A D C eſt triple du demi-cercle générateur, & la cicloïde entiere eſt triple du cercle générateur *.

16. PROBLEME. *Quarrer la Ciſſoïde.* (Fig. 8). Par la nature de cette courbe en faiſant le diametre du cercle générateur $= 2a$, l'on a $y^2 = \frac{x^3}{2a-x} = \frac{x^3}{1-x}$, en ſuppoſant $2a = 1$, $y = x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}$, S. $y\,dx$ = S. $x^{\frac{1}{2}} \times (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$. Élevant $1-x$ à la puiſſance $-\frac{1}{2}$; multipliant enſuite tous les termes de la ſérie réſultante par $x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, l'on aura S. $\frac{dx \cdot x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} =$ $x^{\frac{1}{2}} (\frac{2}{5} x^2 + \frac{2}{7} x^3 + \frac{1.3}{4.9} x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11} . x^5$, &c.

* Si l'on compte les ordonnées depuis le diametre du cercle générateur, les ordonnées P s = D L étant $= y$, & $n\,s = dy$, on aura L $n = x$ & $dy = \frac{dx \sqrt{(ax - xx)}}{x}$, ou $dx = \frac{dz \sqrt{(2az - zz)}}{z}$, en changeant y en x, x en z & faiſant de plus le diametre du cercle générateur $= 2a$. Nous ferons uſage de cette équation au N° 304. de la Section troiſieme.

AUTREMENT. Suppoſons $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, l'on aura $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, ou $ay^2 - y^2 \cdot x = x^3$, $2ay\,dy - 2xy\,dy - y^2\,dx = 3x^2\,dx$, $2\,dy\,.\,(a-x) - y\,dx = \frac{3xx\,dx}{y}$; mais en ſuppoſant $PN = u$, l'on a par la nature de la courbe $PM : PA :: PA : PN = u = \frac{x^2}{y}$, & ſuppoſant de plus $PB = a - x = z$, on aura $2\,.\,z\,dy - y\,dx = 3u\,dx$, & $2\,S.\,z\,dy - S.\,y\,dx = 3\,S.\,u\,dx$. Mais $u\,dx = PN\,.\,Pp$, eſt l'élément du demi-cercle ANB, $z\,dy = BP\,.\,dy = Bp\,.\,dy = mR\,.\,fm$, eſt l'élément de l'aire $AmBR$, & $y\,dx = PM\,.\,Pp$, eſt l'élément de l'aire $AMDB$, & quand $S.\,z\,dy$ exprime l'aire entiere $ABRm$, compriſe entre l'aſſimptote & la branche Am, $S.\,y\,dx$ exprime auſſi cette aire, & alors $S.\,z\,dy = S.\,y\,dx$; donc alors $2\,S.\,z\,dy - S.\,y\,dx = 3\,S.\,u\,dx$, devient $S.\,z\,dy = 3\,S.\,u\,dx$. Mais $S.\,u\,dx$ exprime le demi-cercle ANB; donc l'eſpace entier $AmBR$ eſt triple du demi-cercle générateur, & l'eſpace entier $SAmRF$ eſt triple du cercle générateur.

17. PROBLEME. *Quarrer la courbe exponentielle dont l'équation eſt* $y = x^x$. Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage, (courbes algébriques 47.) ſi le logarithme hyperbolique d'un nombre eſt $= p$, ce nombre ſera $= 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4} + \frac{p^5}{2.3.4.5} +$ &c.

Le logarithme hyperbolique de x^x étant $= x\,L\,x = L.y$; je ſubſtitue $x\,L\,x$ au lieu de p dans cette ſérie, pour avoir $1 + x\,L.\,x + \frac{x^2\,L.\,x^2}{2} + \frac{x^3\,L.\,x^3}{2.3}$ + &c. $= x^x = y$, $S\,y\,dx = S\,x^x\,dx = S.\,(dx + x\,L.\,x\,.\,dx + \frac{x^2\,L.\,x^2\,dx}{2} + \frac{x^3\,L.x^3\,dx}{2.3}$ + &c.). On prendra les intégrales de chaque terme, en négligeant les diviſeurs de ceux qui en ont en cette maniere.

$$S.\,dx = x$$

$$S.\,x\,.\,L.\,x.\,dx = \tfrac{1}{2}\,x^2\,L.\,x - \tfrac{1}{2^2}\,x^2.$$

$$S.\,x^2\,\overline{L.\,x}^2\,dx = \tfrac{1}{3}.\,x^3\,\overline{Lx}^2 - \frac{2}{3^2}\,x^3 L.x + \frac{2}{3^3}\,x^3.$$

$$S.\,x.^3\,\overline{L.\,x}^3\,dx = \tfrac{1}{4}\,x.^4\,\overline{L.x}^3 - \frac{3}{4^2}\,x^4\,\overline{L.x}^2 + \frac{2.3.x^4\,L.x}{4^3} - \frac{2.3.x^4}{4^4}$$

$$S.\,x^4\,\overline{L.\,x}^4\,dx = \tfrac{1}{5}\,x^5\,\overline{L.x}^4 - \frac{4}{5^2}.\,x^5\,\overline{L.x}^3 + \frac{3.4.x^5\,\overline{L.x}^2}{5^3} - \frac{2.3.4.x^5\,L.x}{5^4} + \frac{2.3.4\,x^5}{5^5}$$

La loi de la progreſſion eſt facile à concevoir, & l'on peut facilement l'appliquer aux autres termes. Si l'on différencie une de ces intégrales, l'on trouvera la différentielle correſpondante : Par exemple, en différentiant $\frac{1}{2}x^2 \text{L.}\, x - \frac{1}{2^2}x^2$, l'on aura, en faiſant varier ſucceſſivement x & L. x, $\frac{2}{3}x\,dx\,\text{L.}\,x + \frac{1}{3}x^2\frac{dx}{x} - \frac{2x\,dx}{2^2} = x\,\text{L.}\,x\,dx + \frac{1}{3}x\,dx - \frac{1}{2}x\,dx = x\,\text{L.}\,x\,dx$ *, & ainſi des autres. En ſubſtituant les valeurs des intégrales, & ne négligeant pas les diviſeurs qu'ont les termes avant l'intégration, l'on aura :

* Car $2^2 = 4$ & $\frac{2x\,dx}{2^2} = \frac{2}{4}x\,dx = \frac{1}{2}x\,dx$.

$$\int y\,dx = \int x^x\,dx = \begin{cases} x + \frac{1}{2}x^1 Lx + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 \overline{Lx}^2 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 \overline{Lx}^3 + \frac{1\cdot x^5 \overline{Lx}^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1}{3^2}x^3 Lx - \frac{1}{2\cdot 4^2}x^4 \overline{Lx}^2 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5^2}x^5 \overline{Lx}^3, \text{ \&c.} \\ + \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{4^3}x^4 Lx + \frac{1}{2\cdot 5^3}x^5 \overline{Lx}^2, \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{4^4}x^4 - \frac{1}{5^4}x^5 Lx, \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{5^5}x^5, \text{ \&c.} \\ + \text{ \&c.} \end{cases}$$

Cette formule repréſente l'aire cherchée. Si l'on fait $x = 1$, alors L. $x = 0$, & il ne reſte que les termes qui, dans les ſéries horiſontales, occupent le premier rang; donc l'aire de la courbe compriſe entre deux ordonnées, dont l'une répond à $x = 0$, & l'autre à $x = 1$, ſera $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^7}$, &c. Cette ſérie eſt ſi convergente que le dixième terme $\frac{1}{10^{10}}$ eſt ſeulement $= \frac{1}{10,000,000,000}$.

18. REMARQUE. L'on peut voir par-là que $\int x^m (\text{L}.x)^m dx = (\frac{1}{m+1} x^{m+1} \text{L}.x)^m - \frac{m}{(m+1)^2} x^{m+1} (\text{L}.x)^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{(m+1)^3} \times x^{m+1} (\text{L}.x)^{m-2} - \frac{m.(m-1).(m-2)}{(m+1)^4} \times x^{m+1} (\text{L}.x)^{m-3} + \frac{m.(m-1).m.(m-2).(m-3)}{(m+1)^5} \times x^{m+1} (\text{L}.x)^{m-4} +$ &c. La ſérie finit au terme auquel l'expoſant de L. $x = 0$; car les termes ſuivans devant être multipliés par cet expoſant, ſeront tous $= 0$. Pour ſe convaincre que c'eſt-là l'intégrale de $x^m \text{L}.x^m dx$, l'on n'a qu'à la comparer avec la cinquieme ci-deſſus, en faiſant $m = 4$. Si $m = 1$, l'intégrale ſera $= \frac{1}{2}.x^2.(\text{L}.x) - \frac{1}{4}x^2$, l'intégrale

l'intégrale S. $\frac{dx}{x.(L.x)^m}$ eſt $= \frac{1}{1-m} L.x^{1-m}$. Car en différentiant cette derniere quantité & ſuppoſant $L.x = z$, l'on aura $\frac{1}{1-m} \times (1-m) z^{1-m-1} dz = z^{-m} dz = \frac{dx}{x(L.x)^m}$, puiſque $dz = dL.x = \frac{dx}{x}$. Si $m = -1$, cette intégrale ſera $\frac{1}{2}(L.x)^2$; on pourra donc employer dans ce cas cette formule, au lieu de la ſérie précédente dont tous les termes deviennent infinis lorſque $m + 1 = 0$. Enfin ſi m eſt négative ou fractionnaire, l'on n'aura S. $x^m (L.x)^m dx$ que par une ſérie infinie, excepté le cas dans lequel $m = -1$.

19. PROBLEME. *Quarrer l'ellipſe.* L'équation à l'ellipſe en faiſant le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, ſera $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, en comptant les abſciſſes C P (Fig. 9.) depuis le centre, & faiſant P M $= y$; donc l'élement de l'eſpace CDMP eſt $= y\,dx = \frac{b}{a} dx\sqrt{(aa-xx)}$, & S. $y\,dx = \frac{b}{a}$. S. $dx\sqrt{(aa-xx)}$. Or S. $dx\sqrt{(aa-xx)}$ eſt égale à l'aire C F m P qui appartient au quart de cercle C F A, dont le rayon $= a$; donc l'aire de l'ellipſe eſt à celle d'un cercle décrit ſur ſon grand axe pris pour diametre, comme $\frac{b}{a}$ S. $dx\sqrt{(aa-xx)}$: S. $dx\sqrt{(aa-xx)} :: \frac{b}{a} : 1 :: b : a$; c'eſt-à-dire, comme le petit demi-axe eſt au demi-grand axe.

Si l'on compte les abſciſſes du ſommet A, l'aire AMP ſera $= \frac{b}{a} S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$; or $S. dx. \sqrt{(2ax - xx)}$ eſt égale au demi ſegment circulaire A P m; donc en intégrant $dx \sqrt{(2ax - xx)}$, l'on aura par les ſéries ce demi-ſegment circulaire qui deviendra égal au demi-cercle en ſuppoſant dans l'intégrale $x = 2a$, & multipliant cette intégrale par $\frac{b}{a}$, l'on aura l'aire d'une demi-ellipſe; or on peut intégrer $dx \sqrt{(2ax - xx)} = dx . x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2a - x)}$, en réduiſant $\sqrt{(2a - x)} = (2a - x)^{\frac{1}{2}}$, en une ſérie infinie par la formule $(a + b)^m$, en ſubſtituant $2a$ au lieu de a, ou ſi l'on veut en ſubſtituant c au lieu de a, & $-x$ au lieu de b, multipliant tous les termes par $dx.x^{\frac{1}{2}}$ & intégrant.

REMARQUE. Si l'on décrit un cercle d'un rayon $= \sqrt{(a . b)}$, ou d'un rayon moyen proportionnel géométrique entre le demi-grand axe & le demi-petit axe, ce cercle ſera au cercle dont le rayon $= a$, comme $a b : a a$ (par ce que les cercles ſont dans les rapports des quarrés des rayons) :: $b : a$.

Mais on vient de voir que l'ellipſe étoit au cercle décrit ſur ſon grand axe, comme $b : a$; donc en faiſant $= S$, l'aire de l'ellipſe, B étant l'aire du cercle dont le rayon $= \sqrt{a b}$, A, l'aire du cercle dont le rayon $= a$, l'on aura S: A :: $b : a$ & B : A :: $b : a$; donc S : A :: B : A; ou, *alternando*, S : B :: A : A. Donc S $=$ B; c'eſt-à-dire, que l'aire d'une ellipſe eſt égale à celle d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre le demi-petit axe & le demi-grand axe.

Si l'on vouloit quarrer l'ellipſe par le moyen de

l'élément du secteur C D i ; après avoir mené la tangente B T, l'ordonnée I H, & décrit du centre C les arcs infiniment petits f R, ft, l'on feroit C H $= x$, H $i = y$; donc C $i = \sqrt{(yy + xx)}$ $=$ C f, (car $f i$ est infiniment petite) ; mais à cause des triangles semblables C H i, C B T, l'on a $x : y :: a :$ B T $= \frac{ay}{x}$, & $x : a ::$ C $i =$ $\sqrt{(yy+xx)} :$ CT $=$ C t* $= \frac{a\sqrt{(yy+xx)}}{x}$.

Mais l'abscisse x croissant BT $= \frac{ay}{x}$ diminue, aussi bien que y ; donc la différentielle T t de B T sera $= \frac{-axdy+aydx}{xx}$; mais à cause des triangles semblables T ft, T B C, l'on a CT : C B :: T t : ft, ou $\frac{a\sqrt{(yy+xx)}}{x} : a :: \frac{-axdy+aydx}{xx} :$ $ft = \frac{-axdy+aydx}{x\sqrt{(yy+xx)}}$; mais les secteurs semblables C $t f$, C R f** donnent C $t : ft ::$ C $f :$ fR, ou $\frac{a\sqrt{(yy+xx)}}{x} : \frac{-axdy+aydx}{x\sqrt{(yy+xx)}} ::$ $\sqrt{(yy+xx)} : f\mathrm{R} = \frac{-xdy+ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

* C t est censée égale à C T, les points T & t étant infiniment proches.

** Les secteurs semblables sont ceux dont les arcs mesurent des angles égaux.

Multipliant f R par $\frac{Cf}{2}$ l'on aura le ſecteur élémentaire $fCR = \frac{-xdy+ydx}{2}$. Mais par la nature de l'ellipſe $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$; donc en ſubſtituant ces valeurs, l'on aura le ſecteur $CfR = \frac{bx^2dx}{2a\sqrt{(aa-xx)}} + \frac{bdx}{2a}\times\sqrt{(aa-xx)}$ = (en réduiſant au même dénominateur) $\frac{bx^2dx+aabdx-bxxdx}{2a.\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{abdx}{2\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{ab}{2}dx.(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$. Réſolvant $(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ en ſérie, multipliant enſuite tous les termes de la ſérie par $\frac{a.b}{2}dx$, & intégrant, l'on aura $S.\frac{abdx}{2.\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80.a^4} + \frac{5bx^7}{224.a^6}$ + &c. Si l'on ſuppoſe $x = a$, l'on aura le quart de l'ellipſe CDB $= \frac{ba}{2} + \frac{ba}{12} + \frac{3ba}{80} + \frac{5ba}{224}$, &c. dont le quadruple donnera l'aire entiere de l'ellipſe.

20. PROBLÊME. *Soit ſuppoſée la circonférence* AHB (Fig. 10.) *d'un quart de cercle étendue*

en une ligne droite a b, dans laquelle en ſuppoſant les abſciſſes a h égales aux arcs A H, *les ordonnées correſpondantes h m ſoient égales aux ſinus* M H *de ces arcs, on demande la ſurface a b c, de la courbe a m c, qu'on appelle courbe de ſinus.* Soit le rayon C A $= a$, l'arc A H $= a h = x$, le ſinus M H de cet arc $= h m = y$; ayant mené les lignes H P, I D perpendiculaires ſur C B & tiré les rayons C H, C I, l'on aura $\overline{HP}^2 = aa - y^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{HM}^2$; & $HP = \sqrt{(aa - yy)}$, & ſa différentielle H o, en ſuppoſant l'arc H I infiniment petit, ſera $= \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$, qu'on prend avec un ſigne contraire, parce que l'arc croiſſant auſſi bien que ſon ſinus, H P diminue. Les triangles C I D, H I o, ayant leurs côtés perpendiculaires, ſont ſemblables; donc C D $= y$: C I $= a$: : H $o = \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$: H I $= dx = hr = \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$; donc l'élément $h\,r\,m\,n = \frac{a\,y\,dy}{\sqrt{(a\,a - y^2)}}$, dont l'intégrale ou l'aire $ahm = S.\,a\,y\,dy\,.\,(a\,a - y\,y)^{-\frac{1}{2}} = -a\sqrt{(aa-yy)} + C$. Pour déterminer la conſtante C, je fais $y = o$; dans ce cas l'on doit avoir $a\,h\,m = o$; donc $-a\sqrt{a\,a} + C = o$, ou $C = +a\sqrt{a\,a} = a\,a$; donc l'intégrale complette eſt $a\,a - a\sqrt{(a\,a - yy)}$. Si l'on fait $y = a = b\,c$, l'on a l'aire entiere $a\,b\,c = a\,a - a\sqrt{o} = a\,a =$ A C B F quarré de a.

21. PROBLÊME. *Quarrer l'hyperbole* A G, *rapportée à ſes axes.* (Fig. 11.). Soit le demi-premier axe $= a$, le demi-ſecond axe $= CB = b$. Par la nature de la courbe, en comptant les x depuis le ſommet A, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$ & ſi l'on fait $b = a$; c'eſt-à-dire, ſi l'hyperbole eſt ſuppoſée équilatere, l'on aura $S.\, y\, dx = S.\, dx\, (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$; tandis que l'aire $S.\, y\, dx$ de l'hyperbole non équilatere ſera $\frac{a}{b}\, S.\, dx\, .\, (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$; donc ſi l'on a l'aire de l'hyperbole équilatere, & qu'on la multiplie par $\frac{b}{a}$, il en réſultera l'aire de l'hyperbole non équilatere. Pour avoir l'aire de l'hyperbole équilatere, on réduira $(2a + x)^{\frac{1}{2}}$ en ſérie, en faiſant pour ſimplifier $2a = c$; multipliant enſuite tous les termes par $x^{-\frac{1}{2}}\, dx$, & intégrant, l'on trouvera, toute réduction faite, $S.\, y\, dx = S.\, dx\, .\, \sqrt{(cx + xx)} = \sqrt{x}\, .\, (\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7aa} + \frac{1.3x^4}{4.6.9a^3}$ — &c.), en remettant la valeur de c. En multipliant cette ſérie par $\frac{b}{a}$, l'on auroit l'aire d'une hyperbole non équilatere.

Si l'on compte les x depuis le centre C, l'élément de l'aire de notre hyperbole ſuppoſée équilatere ſera $= dx\sqrt{(xx - aa)}$, parce que dans ce cas $y = \sqrt{(xx - aa)}$. Si l'on vouloit l'élément de l'aire

AGHC, l'on auroit HG = CP = x, & HC = GP = y; mais l'équation seroit $y^2 = xx - aa$, ou $x^2 = yy + aa$; si l'on fait CH = PG = x, & CP = HG = y, l'on aura $yy = xx + aa$, $y = GH = \sqrt{(xx + aa)}$, $y\,dx = dx \cdot \sqrt{(xx + aa)}$, & l'aire cherchée = S. $dx\sqrt{(xx + aa)}$. Si l'on fait GP = y, l'équation $GH = \sqrt{(xx + aa)}$ donne GH = $\sqrt{(yy + aa)}$, parce que x se change en y; donc Pp différentielle de CP = GH devient = $\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy + aa)}}$. Multipliant P$p$ par GP, l'on a la différentielle de l'aire AGP = $\frac{yy\,dy}{\sqrt{(yy + aa)}}$. Si l'on vouloit avoir l'aire CAGH exprimée par l'ordonnée HG au second axe, en faisant HG = y, l'on auroit $\overline{CH}^2 = \overline{GP}^2 = x^2 = y^2 - a^2$, CH = $\sqrt{(yy - aa)}$, sa différentielle HD = $\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy - aa)}}$, & l'élément DHG$g$ = $\frac{yy\,dy}{\sqrt{(yy - aa)}}$.

Comparons ces élémens de l'aire de l'hyperbole équilatere, avec ceux de l'aire du cercle. En faisant le rayon du cercle = a, (Fig. 3.) & AP = x, l'élément de l'aire circulaire sera = $dx \cdot \sqrt{(2ax - xx)} = dx \cdot \sqrt{(ax - xx)}$ (en faisant le diametre = a). Mais l'aire sera = S. $dx \cdot \sqrt{(aa - xx)}$, le rayon étant = a, & l'origine des x étant au centre. Tout cela suit ce qu'on a dit ci-dessus (14).

Si l'on fait CH = $x = \sqrt{(aa - yy)}$, Hi = y, $ri = dy$, $il = Hh = \pm dx$ (les signes +

ou — ont lieu ſelon que x va en augmentant ou en diminuant), les triangles C H i, r i l (ſemblables parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires) donnent $\sqrt{(aa - yy)} : y :: dy : \pm dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$. Mais parce que y diminue lorſque x augmente, l'élément $y\,dx$ de l'eſpace C D i H, ſera $= \frac{-yy\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$. S'il s'agit au contraire de l'eſpace A H i, ſon élément eſt $= -dx \cdot y = \frac{yy\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$, parce que dans le premier cas dy a le ſigne — & le ſigne + dans le ſecond.

L'on peut auſſi comparer les ſecteurs circulaires & les arcs circulaires avec les ſecteurs hyperboliques, qui, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus, peuvent être regardés comme les logarithmes des abſciſſes correſpondantes; donc les ſecteurs correſpondans à des abſciſſes en progreſſion géométrique, ſont en progreſſion arithmétique. Si l'on diviſe ces ſecteurs par la moitié du demi-axe, ils ſeront encore en progreſſion arithmétique, & nous appellerons *logarithmes hyperboliques d'une dimenſion*, ou *logarithmes hyperboliques ſimples*, ces ſecteurs ainſi diviſés.

Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (14) en faiſant la tangente N T (Fig. 3.), $= x$, & le rayon du cercle $= a$, le ſecteur C i r eſt $= \frac{a^3\,dx}{2 \cdot (aa + xx)}$. Mais le ſecteur réſulte de l'arc i r multiplié par la moitié $\frac{a}{2}$ du rayon. Donc en diviſant ce ſecteur élémentaire par $\frac{a}{2}$ l'on a $\frac{a^2\,dx}{aa+xx}$ pour l'élé-

ment de l'arc A r, & l'arc A r eſt $= S.\frac{a^2\,dx}{aa+xx}$.

A cauſe des triangles C H i, $r\,i\,l$ (Fig. 3.), ſemblables, parce qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires, l'on aura $r\,i : i\,l = H\,h :: C\,i : i\,H$, ou en faiſant $AH = x$, $Hh = dx$, $ri : dx :: a : \sqrt{(2ax - xx)}$, ou $ri = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ & $S.\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = A\,i\,D$. Si l'on prend les abſciſſes du centre C, l'on aura $H\,h = l\,i = -dx$: donc $ir : -dx :: a : \sqrt{(aa-xx)}$ & $ri = \frac{-a\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$. De même l'on a $ir : rl :: C\,i : CH$. C'eſt pourquoi en faiſant $i\,H = y$, l'on a $rl = dy$, $CH = \sqrt{(aa-yy)}$; donc $ir : dy :: a : \sqrt{(aa-yy)}$, ou $ir = \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$.

Les triangles ſemblables $T\,t\,f$, C T A & les ſecteurs ſemblables $C\,i\,r$, $C\,f\,t$, donnent $ir : t\,f :: C\,i = CA : C\,t$. & $ft : fT :: CA : t\,A$, ou $ft = \frac{CA.fT}{tA}$. Subſtituant cette valeur au lieu de ft, l'on a $ir : \frac{CA.fT}{tA} :: CA : Ct$, ou $ir : CA :: \frac{CA.fT}{tA} : Ct :: fT : \frac{Ct.tA}{CA}$; donc $ir : fT :: CA : \frac{Ct.tA}{CA} :: CA^2 : Ct.tA$;

ou $ir : f\,T :: \overline{CA}^2 : C\,t . t\,A$; donc en faisant la sécante, $C\,t = f$, l'on a $ir : df = f\,T :: aa : f\sqrt{(ff - aa)}$: car alors $t\,A = \sqrt{(ff - aa)}$, ou $ir = \frac{a^2\,df}{f\sqrt{(ff - aa)}}$. Si l'on multiplie la valeur de ir par $\frac{a}{2}$, l'on aura le secteur élémentaire $C\,ir = \frac{a^3\,df}{2 . f . \sqrt{(f^2 - aa)}}$. Si l'on fait la co-tengente $= x$, l'élément ir de l'arc A D sera $= \frac{-a^2\,dx}{aa + xx}$, & le secteur C ir considéré comme l'élément du secteur C A i sera $= \frac{-a^3\,dx}{2 . (aa + xx)}$; parce que l'arc A i augmentant, la co-tangente diminue, & si l'on fait la co-sécante $= f$, l'on aura les mêmes formules que l'on vient de trouver en employant la sécante, mais elles seront affectées du signe —, parce que la co-sécante diminue lorsque l'arc augmente.

Soit l'hyperbole équilatere A M (Fig. 12.) dont le centre soit C, le demi-axe A C $= a$, que nous appellerons le sinus total ou le rayon par analogie au cercle, l'abscisse C P $=$ le co-sinus, l'ordonnée P M $=$ le sinus & l'abscisse A P $=$ le sinus verse. Si l'on fait A P $= x$, l'on aura C P $= a + x$, P M $= \sqrt{(2ax + xx)}$, Donc le triangle C M P $= \frac{(a + x . \sqrt{(2ax + xx)}}{2}$. Le secteur C A M est égal à ce triangle, moins le demi-segment

A M P ; donc l'élément du ſecteur eſt égal à l'élément du triangle, moins l'élément du ſecteur. L'élément du demi-ſegment A M P eſt $= dx\sqrt{(2ax+xx)}$, celui du triangle eſt $\frac{dx\,.\,\sqrt{(2ax+xx)}}{2} + \frac{(a+x)}{2} \times \frac{dx\,.\,(a+x)}{\sqrt{(2ax+xx)}}$, d'où retranchant $dx\sqrt{(2ax+xx)}$, il reſte $dx\frac{aa+2ax+xx}{2\sqrt{(2ax+xx)}} - adx\frac{\sqrt{(2ax+xx)}}{2} = \frac{aadx}{2\sqrt{(2ax+xx)}}$; donc le ſecteur CMA eſt $= S.\frac{aadx}{2\sqrt{(2ax+xx)}}$, & le logarithme hyperbolique ſimple exprimé par le Sinus verſe ſera $= S.\frac{adx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$. Si l'on fait le co-ſinus CP $= x$, l'on aura PM $= \sqrt{(xx-aa)}$, & le triangle CMP ſera $= x\frac{\sqrt{(xx-aa)}}{2}$. Si l'on différencie cette quantité & qu'on en retranche $dx\sqrt{(xx-aa)}$, qui dans ce cas exprime la différentielle du demi-ſegment A P M, l'on aura l'élément du ſecteur C A M $= \frac{aadx}{2\sqrt{(xx-aa)}}$; ce ſecteur ſera $= S.\frac{aadx}{2\sqrt{(xx-aa)}}$, & le logarithme hyperbolique ſimple exprimé par le co-ſinus

ſera $= S.\frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$. Suppoſons le ſinus P M $= y$: en comptant les abſciſſes $x =$ C P du centre, l'on aura $y^2 = x^2 - aa$, ou $x^2 = aa + yy$, ou $x =$ C P $= \sqrt{(aa+yy)}$; donc la différentielle P p ſera $= \frac{ydy}{\sqrt{(aa+yy)}}$. Multipliant cette différentielle par y, l'on a l'élément du demi-ſegment $= \frac{yydy}{\sqrt{(aa+yy)}}$; & le triangle CMP eſt alors $= \frac{y.\sqrt{(aa+yy)}}{2}$. Si l'on en prend la différentielle, & qu'on en retranche celle du demi-ſegment, l'on aura le ſecteur $= S.\frac{aady}{2\sqrt{(aa+yy)}}$, & le logarithme hyperbolique ſimple exprimé par le ſinus ſera $= S.\frac{ady}{\sqrt{(aa+yy)}}$.

Si du point A l'on tire A F paralelle au ſecond demi-axe C B, on appellera cette ligne tangente hyperbolique. Il s'agit d'exprimer le ſecteur hyperbolique par la tangente A F que nous ferons $= t$. En faiſant le co-ſinus C P $= x$, le ſinus P M $= y$, les triangles ſemblables C A F, C P M donneront $x : y :: a : t$, $x^2 : y^2 :: aa : tt$, & (*dividendo*) $x^2 - y^2 = aa$ *: $y^2 :: aa - t^2 : t^2$; donc y^2

*. De l'équation à l'hyperbole équilatere $y^2 = x^2 - aa$, l'on tire aiſément $x^2 - yy = aa$.

$= \frac{aat^2}{aa-t^2}$, & $aa+y^2 = aa + \frac{a^2t^2}{aa-t^2}$ $= \frac{a^4}{a^2-t^2}$, $\sqrt{(aa+yy)} = \frac{a^2}{\sqrt{(aa-t^2)}}$

De plus l'équation $y^2 = \frac{aat^2}{aa-t^2}$ donne $y = \frac{at}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$; donc $dy = \frac{adt}{\sqrt{(aa-t^2)}} + \frac{at^2dt}{(aa-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ * $= \frac{a^3dt}{(aa-t^2)^{\frac{3}{2}}}$: substituant les valeurs de dy & de $\sqrt{(aa+yy)}$ dans S. $\frac{a^2dy}{2\sqrt{(aa+yy)}}$, & dans S. $\frac{ady}{\sqrt{(aa+yy)}}$ $=$ S. $\frac{ady}{(aa+yy)^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura le secteur $=$ S. $\frac{a^3dt}{2.(aa-t^2)}$, & le logarithme hyperbolique simple $=$ S. $\frac{a^2dt}{aa-t^2}$.

Si de l'extrémité B du second demi-axe, l'on tire B D parallelement au premier axe, jusques à la rencontre de C M prolongée, s'il le faut, nous appellerons B D co-tangente hyperbolique. Si l'on fait cette co-tangente $= z$, les triangles rectangles C A F, C B D ayant les angles aigus B D C, A C F

* On prend la différentielle en faisant varier successivement t & $\frac{a}{\sqrt{(aa-t^2)}} = a(a^2-t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

alternes internes, ſont ſemblables ; donc $t : a :: a : \zeta = \frac{aa}{t}$, & $t = \frac{aa}{\zeta}$, $dt = \frac{-a^2 d\zeta}{\zeta^2}$, & $aa - t^2 = aa - \frac{a^4}{\zeta^2} = \frac{aa}{\zeta^2}.(\zeta^2 - aa)$; donc $\frac{dt}{aa - t^2} = \frac{-d\zeta}{\zeta\zeta - aa}$; donc le ſecteur CAM $= S.\frac{a^2 dt}{2.(aa - t^2}$ ſera $= S.\frac{-a^2 d\zeta}{2.(\zeta^2 - a^2)}$, & le logarithme hyperbolique ſimple ſera $= S.\frac{-aad\zeta}{\zeta\zeta - aa}$

Si l'on réduit $\frac{a}{\sqrt{(aa - yy)}} = a(aa - yy)^{-\frac{1}{2}}$ en une ſérie infinie, en élevant $(aa - yy)$ à la puiſſance $-\frac{1}{2}$ par le binome de Newton, qu'on multiplie tous les termes de la ſérie réſultante de cette opération par a & par dy, & qu'on integre, l'on aura (Fig. 3.) l'arc circulaire $Ar = S.\frac{ady}{\sqrt{(aa - yy)}} = y + \frac{y^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.y^5}{2^2.1.2.5.a^4} + \frac{1.3.5.y^7}{2^3.1.2.3.7.a^6}$ + &c. Cette ſérie eſt utile pour trouver les arcs qui ne ſont pas plus grands qu'un quart de cercle. Si l'on fait $y = a$, l'on a l'arc de 90°. $= a(1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.1.2.5} + \frac{1.3.5}{2^3.1.2.3.7} + \frac{1.3.5.7}{2^4.1.2.3.4.9} + \frac{1.3.5.7.9}{2^5.1.2.3.4.5.11}$ &c.) (A). L'on a le logarithme hyperbolique ſimple =

$$S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}} = y - \frac{y^3}{2.3\,a^2} + \&c.(B).$$

C'eſt la même ſérie que la précédente, excepté que les termes de celle-ci ont les ſignes + & — alternativement. Si l'on fait $y = a$, & que l'on change les ſignes des termes de rang pair de la ſérie A, l'on aura le logarithme hyperbolique ſimple, correſpondant à $y = a$. Nous ferons ce logarithme = D. Si l'on ſuppoſe $y > a$, la ſérie B ſera divergente; dans ce cas on élévera $aa + yy$ à la puiſſance $-\frac{1}{2}$ en prenant yy pour le premier terme, ou l'on élévera $yy + aa$, à la puiſſance $-\frac{1}{2}$, & l'on aura

$$S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy+aa)}} = a.L.y + \frac{a^2}{2.2.y^2} - \frac{1.3\,a^4}{2^2.1.2.4.y^4} + \frac{1.3.5.a^6}{2^3.1.2.3.6.y^6} - \frac{1.3.5.7.a^8}{2^4.1.2.3.4.8.y^8} + \&c + C.$$

Quoiqu'en faiſant $y = 0$, le ſecteur CAM doive être égal à 0, auſſi bien que la ſérie qui exprime le logarithme hyperbolique ſimple, néanmoins cette ſuppoſition ſeroit inutile pour déterminer la conſtante C, parce que dans ce cas tous les termes de la ſérie deviennent infinis. Mais on a dit ci-deſſus que le logarithme hyperbolique ſimple correſpondant à $y = a$ étoit = D; on fera donc $y = a$ & l'on égalera la ſérie que nous venons de trouver, avec la ſérie B, dans laquelle on mettra a au lieu de y, & l'on aura

$$a.L.a + C + \frac{a}{2.2} - \frac{1.3\,a}{2^2.1.2.4} +$$

$\frac{1.3.5.a}{2^3.1.2.3.6}$ &c. $= D = a\left(1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.1.2.5}\right)$ &c. ou $C = a\left(1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.1.2.5}\right)$ &c.

$- a\,L.\,a - a\left(+\frac{1}{2.2} - \frac{1.3}{2^2.1.2.4}\right.$ &c.$)$

$= - a\,L.\,a - a + \frac{(2+3).a}{2.2.3} -$

$\frac{(4+5).1.3.a}{2^2.1.2.4.5} + \frac{(6+7).1.3.5.a}{2^3.1.2.3.6.7}$ &c.

en réduiſant les termes; donc $S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy+aa)}} =$

$a\,.\,L.\,y - a.\,L.\,a - a + \frac{(2+3)a}{2.2.3}$ &c. $+$

$\frac{a^3}{2.2.y^2} - \frac{1.3.a^3}{2^2.1.2.4.y^4} +$ &c. En multipliant la ſérie par $\frac{a}{2}$, l'on aura le ſecteur hyperbolique correſpondant à y.

Nous avons dit ci-deſſus qu'en faiſant le co-ſinus $= x$, le logarithme hyperbolique ſimple étoit $= S.\frac{a\,dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$. Si l'on change x en y, ce logarithme ſera $= S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. Si l'on fait $AP = S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, $AB = a$ & que l'on décrive la courbe B m (Fig. 13.) en prenant toujours l'ordonnée égale au co-ſinus hyperbolique y, l'abſciſſe

ciſſe AP $= x$ étant égale au logarithme hyperbolique ſimple, l'on aura $x = S.\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$. C'eſt l'équation de la ligne des *co-ſinus hyperboliques* *. Si l'on fait AP $= x = S.\frac{a\,dv}{\sqrt{(aa+yy)}}$, en prenant PM égale au *ſinus hyperbolique* (ſuppoſé $= y$), l'on aura $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$; & la courbe A M dont les abſciſſes ſont égales aux logarithmes hyperboliques ſimples, & les ordonnées PM aux ſinus correſpondans eſt appellée ligne des *ſinus hyperboliques*.

Au reſte par logarithme hyperbolique ſimple, on entend ceux qu'on trouve en diviſant les ſecteurs hyperboliques d'une hyperbole équilatere dont le demi-axe $= a$ par $\frac{a}{2}$.

22. REMARQUE I. Si l'on fait AF $= y$, Fn $= x$, l'on aura FB (fig. 1.) $= dy$, l'élément BFMn $= x\,dy$ & S $x\,dy$ ſera l'eſpace ABM. Soit $y^2 = ax$ l'équation de la parabole, l'on aura $x = \frac{y^2}{a}$, $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Donc S. xdy ſera $= S.\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}+1} dx =$

* Si l'on change x en p, & y en q, l'on a $dp = \frac{a\,dq}{\sqrt{(qq-aa)}}$ qui eſt l'équation que nous avons trouvée ſection précédente (108) pour la développée de la tractrice.

$\frac{\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}+2}}{-\frac{1}{2}+2} = \frac{1}{1}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x = \frac{1}{1}yx$; c'eſt-à-dire, que l'eſpace extérieur A B M de la parabole eſt égal au tiers du rectangle de l'ordonnée in, & de l'abciſſe F n = A i.

REMARQUE. II. Si l'angle des ordonnées & des abciſſes n'étoit pas droit, ſi cet angle M P N étoit = u (Fig. 14.) dans ce cas le parallélograme P p M n qu'on peut regarder comme l'élément de l'aire A M P ſeroit égal au produit de P $p = dx$ par la hauteur M N de ce parallélograme. Pour trouver M N, je remarque que dans le triangle rectangle M N P, en faiſant M P = y, & le ſinus total = r, l'on a $r : y ::$ ſinus u : M N = $\frac{\text{ſinus } u \cdot y}{r}$; donc en ſubſtituant cette valeur au lieu de y, l'élément de l'aire ſera = $\frac{\text{ſinus } u \cdot y}{r} \cdot dx$, & l'aire A M P = S. $\frac{\text{ſinus } u \cdot y\, dx}{r} = \frac{\text{ſinus } u}{r} \times$ S. $y\, dx$. Il ſuffira donc de chercher l'aire comme ſi les ordonnées étoient perpendiculaires aux abciſſes, & de la multiplier enſuite par $\frac{\text{ſinus } u}{r}$, le produit donnera l'aire cherchée.

On a trouvé ci-deſſus (4) l'aire parabolique A M P (Fig. 1.) = $\frac{2}{3}xy$, en ſuppoſant l'angle des ordonnées & des abciſſes, droit. Si l'angle M P p étoit tel que l'on eût $\frac{\text{ſinus } u}{r} = \frac{1}{2}$, cette aire ſeroit = $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}xy = \frac{1}{3}xy$.

23. Si les ordonnées partent d'un point C (Fig. 15.) on décrira du centre C avec le rayon C B = y, l'arc B n = dx entre les rayons infiniment proches B C, b C, & l'on pourra regarder le ſecteur C B n comme égal au triangle C B b; or le ſecteur C B $n = \frac{y\,dx}{2}$; donc S. $\frac{y\,dx}{2}$ = $\frac{1}{2}$ S. $y\,dx$ ſera la formule de quadrature dans ce cas-là. Pour intégrer $\frac{1}{2}\,y\,dx$, l'on ſubſtituera dans cette formule la valeur de dx donnée en y & dy; & l'on doit remarquer que dx étant un arc décrit d'un rayon variable y, on ne ſauroit avoir ſon intégrale.

Soit le rayon C A = a, je décris un cercle avec le rayon a, & je fais l'arc variable de ce cercle A M = z, M m = dz, les arcs B n, M m étant décrits du même centre entre les côtés d'un même angle C, les ſecteurs B C n, M C m, ſont ſemblables; donc C B : C M :: B n : M n, ou $y : a :: dx : dz$; donc $dx = \frac{y\,dz}{a}$; donc $\frac{1}{2}$ S. $y\,dx$ = $\frac{1}{2}$ S. $\frac{y^2\,dz}{a}$. On pourra ſubſtituer dans cette formule la valeur de dz en y & dy, & l'intégrer enſuite.

24. PROBLÈME. *Trouver la quadrature de la ſpirale d'Archimede, dans laquelle en ſuppoſant le rayon du cercle générateur = r, la circonférence = c, l'on a l'équation xy = rx = ax, en faiſant r = a.* Pour employer la formule que l'on vient de trouver, nous ſubſtituerons z à x, ce qu'on peut faire, parce que x déſigne dans l'équation de la courbe, un arc de cercle décrit d'un rayon conſtant, & nous

aurons $cy = az$, $adz = c\cdot dy$, $dz = \frac{c}{a}dy$. Subſtituant cette valeur de dz dans la formule $\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{a}dz$, l'on a $\frac{c}{2a^2}\cdot y^2\,dy$, pour la valeur du ſecteur CBn (Fig. 16.); donc $\frac{c}{2aa}$ S. $y^2\,dy$ eſt égale à l'eſpace CfB compris entre l'arc CfB & le rayon CB. Or S. $y^2\,dy = \frac{y^3}{3}$; donc cet eſpace eſt $= \frac{c}{6}\cdot\frac{y^3}{a^3}$, & ſi l'on fait le rayon CB $= a =$ CA, l'eſpace entier de la ſpirale d'Archimede CBA ſera $= \frac{c}{6}\cdot\frac{a^3}{a^2} = \frac{c\cdot a}{6}$; c'eſt-à-dire, que la ſurface de la ſpirale d'Archimede eſt égale au ſixieme du rectangle de la circonférence & du rayon. Or la ſurface du cercle générateur eſt $= \frac{ca}{2}$; donc l'aire de la ſpirale eſt à la ſurface du cercle générateur comme $\frac{ca}{6} : \frac{ca}{2} :: \frac{1}{6} : \frac{1}{2} :: 2 : 6 :: 1 : 3$.

25. PROBLÊME. *Quarrer les ſpirales repréſentées par l'équation* $c^n y^m = r^m x^n = a^m z^n$, *en faiſant* $r = a$ *&* $x = z$, *comme dans le Problême précédent.* L'on aura $a^m z^n = c^n y^m$, $z^n = \frac{c^n}{a^m}\cdot y^m$, $z = \frac{c}{a^{\frac{m}{n}}}\cdot y^{\frac{m}{n}}$, en prenant la racine n de part & d'autre; $dz = \frac{\frac{m}{n}\cdot c\cdot y^{\frac{m}{n}-1}\,dy}{a^{\frac{m}{n}}}$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2 dz}{a} = \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+1} dy$, dont l'intégrale est $= \frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{c}{a^{\frac{m}{n}+1}} \cdot y^{\frac{m}{n}+2}$ *. Si l'on ſuppoſe $y = a$, cette intégrale devient $\frac{n}{(m+2n)} \times \frac{m}{2n} c a^{\frac{m}{n}+2-\frac{m}{n}-1}$ (en retranchant l'expoſant $\frac{m}{n} + 1$ de l'expoſant $\frac{m}{n} + 2$) $= \frac{m \cdot ac}{2m+4n}$. Si $m = n = 1$, l'on a $\frac{1}{6} a \cdot c$. Si $m = 3$, & $n = 5$, l'on a $\frac{3ac}{26}$, c'eſt à-dire $\frac{3}{26}$ du rectangle de la circonférence & du rayon du cercle générateur ; en général on aura la ſurface $= \frac{m}{2m+4n} \cdot \frac{c y^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}$.

REMARQUE. Si l'on ſuppoſe que le rayon Ca ſoit $= 2a = 2$ CA dans la ſpirale d'Archimede, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe que le point décrivant

* L'expoſant $\frac{m}{n} + 1$ étant augmenté d'une unité devient $= \frac{m}{n} + 2 = \frac{m+2n}{n}$, & diviſer par cette fraction, c'eſt multiplier par $\frac{n}{m+2n}$.

B se meuve uniformément sur le rayon C a, de maniere qu'après la premiere révolution du rayon autour de C, ce point se trouve en A, & qu après la seconde révolution il se trouve en a, l'intégrale $\frac{n}{m+2n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{c y^{\frac{m}{n}+2}}{a^{\frac{m}{n}+1}}$, devient $=$ $\frac{m}{2m+4n} \cdot \frac{c}{a^2} y^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{c}{aa} y^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{ac}{3} = \frac{8}{9} ac$, lorsque $y = 2a$. Si l'on veut avoir l'espace renfermé entre la seconde spire & le cercle générateur, voici comme il faut s'y prendre.

Je fais la variable M $g = y$; donc C $g = a + y$. Faisant M $m = dz$, & du point C décrivant l'arc g L, les secteurs semblables C M m, C g L donneront $a : dz : a+y : g\,L = \frac{(a+y)}{a} dz$.

Le trapèze M m L g est $= \frac{(M\,m + g\,L)\,M\,g}{2a}$ $= \frac{(ay+yy)\,dz}{2a} + \frac{y\,dz}{2}$; mais par la nature de la courbe, $az = cy$, $dz = \frac{c}{a} dy$; donc l'élément de l'espace cherché est $= \frac{c}{a} \times \left(\frac{ay\,dy + y^2 dy}{2a} + \frac{y\,dy}{2} \right)$, dont l'intégrale est $= \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{y^3}{3}}{2a} + \frac{y^2}{4} \right)$. Si y

$= 0$, l'intégrale eſt $= 0$, comme cela doit être ; ainſi il n'y a point de conſtante à ajoûter. Si l'on fait $y = a$, l'intégrale devient $= \frac{c}{a} \times \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{4}\right) : 2a = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5aa}{12} + \frac{aa}{4}\right)$

$= \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{5aa + 3aa}{12}\right) = ca \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot ca$

$= \frac{4ca}{6}$; mais l'eſpace renfermé dans la premiere ſpire eſt $= \frac{1}{6} ac$; c'eſt-à-dire eſt égal au tiers du cercle générateur & par conſéquent l'eſpace renfermé entre la circonférence du cercle générateur & la premiere ſpire, eſt les deux tiers du cercle générateur, ou eſt $= \frac{2ac}{6}$; donc l'eſpace renfermé entre les deux ſpires eſt $= \frac{6}{6} ac = ac$, ou double du cercle générateur, & la ſurface compriſe entre le centre C & la ſeconde ſpire eſt $= \frac{7}{6} ac$; donc la ſurface $\frac{8}{6} ac$ renferme d'abord la ſurface $\frac{1}{6} ac$ de la premiere ſpire, plus la ſurface de la ſeconde, d'où l'on peut conclure que lorſque l'intégrale répond à une ſpire qui en renferme pluſieurs autres, les ſurfaces des ſpires intérieures ſont compriſes dans l'intégrale de maniere que s'il s'agit de la troiſieme ſpire toute entiere, la ſurface exprimée par l'intégrale $\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{aa} \cdot \frac{y^3}{3}$, qui dans ce cas devient $= \frac{27}{6} ac$ (parce que alors $y = 3a$), renferme la ſurface com-

prise entre le centre C & la troisieme spire ; plus la surface comprise entre la seconde spire & le centre, plus la surface comprise entre la premiere spire & le centre. En effet si l'on cherche la surface comprise entre la troisieme spire & un cercle dont le rayon seroit $= 2a$, on trouvera par une méthode semblable à celle que l'on vient de mettre en usage pour la seconde spire, que cette surface est $= \frac{7}{6} ac$, & comme le cercle dont le rayon est $2a$, est $= 2ac$, (ou quadruple du cercle générateur $\frac{1}{2} ac$) $= \frac{12ac}{6}$, l'espace compris entre la troisieme spire & le centre sera $= \frac{19}{6} . ac$; donc l'intégrale $\frac{37}{6} ac$ contient encore $\frac{7}{6} ac + \frac{1.ac}{6}$, ou l'espace compris entre la seconde spire & le centre, c'est-à-dire la surface de la seconde spire, plus la surface de la premiere spire & ainsi de suite; de sorte que l'intégrale qui répondra à une spire du rang n, contiendra, outre la surface de cette spire comprise entre le centre & cette spire, contiendra dis-je, la somme des surfaces de toutes les spires renfermées dans la plus grande qui est celle du rang n. Si l'on fait attention qu'après la premiere révolution ce rayon variable C B a parcouru la surface de la premiere spire, que dans la seconde révolution ce rayon parcourt la surface de la seconde spire, &c. On pourra concevoir pourquoi l'intégrale qui répond à la cinquieme spire, par exemple, renferme non-seulement la surface de la cinquieme spire, mais encore la somme des surfaces de la 4e, 3e, 2e, 1re spires. Il est bon de bien remarquer cela pour ne pas tomber dans l'erreur, en s'imaginant que la surface renfermée entre la

courbe $a\,g\,A\,B\,C$ & la ligne $A\,a$, par exemple, eſt $= \frac{8\,a\,c}{6}$, tandis qu'elle eſt ſeulement $= \frac{7}{6}\,a\,c$*.

Mais, dira-t-on, comment donc trouver la ſurface compriſe entre le centre & une ſpire quelconque, par exemple, la quatrieme? L'on n'a qu'à prendre l'intégrale en ſuppoſant $y = 4\,a$, & l'on aura $\frac{64\,a\,c}{6}$; on prendra auſſi l'intégrale en ſuppoſant $y = 3\,a$, c'eſt-à-dire, l'intégrale qui répond à une ſpire d'un rang immédiatement inférieure, l'on aura $\frac{27\,a\,c}{6}$; on retranchera cette intégrale de la premiere, le reſte $\frac{37.ac}{6}$ donnera la ſurface de la 4e ſpire, ce qui eſt évident.

26. PROBLÊME. *Soit ſuppoſée* $A\,B$ (Fig. 15.) *une courbe rapportée au foyer* C *telle que ſon équation ſoit* $B\,n = d\,x = \frac{d\,y\,\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$ *dont on demande l'aire.* En ſubſtituant la valeur de $d\,x$ dans la formule $\frac{1}{2}\,.\,S.\,y\,d\,x$, l'on aura $\frac{1}{2}\,.\,S.\,y\,d\,x = \frac{1}{2}\,.\,S.\,\frac{y^{\frac{3}{2}}\,d\,y}{\sqrt{a}} = \frac{y^{\frac{5}{2}}}{5.\sqrt{a}} + C$. Si l'aire doit s'évanouir en faiſant $y = C\,A = a$, l'on aura $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{5.a^{\frac{1}{2}}} + C = 0$, ou $C = -\frac{a^2}{5}$; telle eſt

* S'il s'agit de la ſurface de la troiſième ſpire, on doit entendre, 1°. La ſurface de la premiere, plus l'aire compriſe entre la 1e & la 2e; plus l'aire compriſe entre la 2e & la 3e. C'eſt la ſomme de ces aires qui forme la ſurface de la 3e ſpire. On comprend par-là ce que c'eſt que la ſurface de la 4e, 5e, &c. ſpire.

la valeur de la conſtante C dans ce cas, & l'intégrale complette ſera $\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5.\sqrt{a}} - \frac{a^2}{5}$, pourvu que y ne réponde qu'à une ſeule ſpire tout au plus en comptant depuis le point auquel répond $y = a$, autrement il faut avoir égard à la remarque du N°. précédent.

27. PROBLÊME. *Quarrer la ſpirale de l'équation* $dx = \frac{dy\sqrt{(yy-bb)}}{b} = \frac{dy\sqrt{(yy-aa)}}{a}$, *en faiſant* $b = a$. Suppoſons que la courbe A B (Fig. 15.) ſoit celle de l'équation ; ce ſera donc, comme il ſuit de ce qu'on a dit dans la ſection précédente (106), la développante d'un cercle dont le rayon $= a$. Subſtituant la valeur de dx dans $\frac{1}{2}y\,dx$, & intégrant, l'on aura l'aire

$$\text{A C B} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{(yy-aa)^{\frac{3}{2}}}{a} = \frac{1}{3a}.(yy-aa)^{\frac{3}{2}},$$

cette aire devient $= 0$, lorſque $y = a$, comme cela doit être ; ainſi je n'ajoûte point de conſtante.

Pour trouver l'eſpace compris entre la courbe & la circonférence du cercle, il ſuffit de retrancher de l'intégrale ci-deſſus le ſecteur circulaire correſpondant C A M.

On peut auſſi s'y prendre de la maniere ſuivante : ayant tiré les rayons oſculateurs infiniment proches, B s, b p, qui étant des tangentes du cercle, ſont perpendiculaires aux rayons C s, C p ; ſi l'on conçoit que le point p s'écarte du point s, de maniere que C p faſſe un angle infiniment petit avec C s, la ligne b p fera un angle égal avec B s prolongée s'il le faut. Maintenant faiſant A s = B s = z, $sp = dz$, & regardant l'arc

B b comme un petit arc circulaire, les secteurs B p b, s C p, seront semblables, & l'on aura C s $= a : s\,p = d\,z :: $ B $s = b\,p = z :$ B $b = \frac{z\,d\,z}{a}$. Multipliant cette valeur par $\frac{z}{2}$, l'on a le secteur élémentaire $b\,p$ B $= \frac{1}{2\,a} \cdot z^2\,d\,z$, & en intégrant l'espace A s B sera $= \frac{1}{6\,a}\,z^3$. On n'ajoûte point de constante, parce que lorsque $z = 0$, l'intégrale est $= 0$. Si l'on fait $z = c$, l'espace entier compris entre la circonférence c du cercle & la branche entiere A B sera $= \frac{1}{6} \cdot \frac{c^3}{a}$. Mais la surface du cercle est $= \frac{a \cdot c}{2}$; donc cette surface est à celle qu'on vient de trouver comme $\frac{a \cdot c}{2} : \frac{c^3}{6\,a} :: a : \frac{c^2}{3\,a} :: 3\,a\,a : c^2$; c'est-à-dire, comme le triple du quarré du rayon au quarré de la circonférence.

REMARQUE. Si l'on développoit le cercle en allant de A en R, on auroit une autre courbe A L qui ne différeroit de la premiere que par sa position.

28. PROBLÊME. *Quarrer la spirale hyperbolique représentée par l'équation* $y\,z = a\,c$. (Fig. 17.) On aura $z = \frac{a \cdot c}{y} = a\,c\,y^{-1}$, $d\,z = -a \cdot \times c\,y^{-2} \cdot -d\,y$. (car z augmentant y diminue) $= a\,c\,y^{-2}\,d\,y$. Maintenant si l'on fait $y : d\,x :: a : d\,z$, l'on aura $d\,x = \frac{y\,d\,z}{a}$, & la formule $\frac{1}{2} \cdot y\,d\,x$ deviendra $= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{a} \cdot d\,z = \frac{1}{2\,a} \times a\,c\,y^2\,y^{-2} \cdot d\,y$

(en ſubſtituant la valeur de $d\,z$ qu'on vient de trouver) $= \frac{c \cdot dy}{2}$; or S. $\frac{c \cdot dy}{2}$ eſt $= \frac{1}{2}\,c\,y$; donc ſi c eſt ſuppoſée repréſenter la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt $= a$, la ſurface de la ſpirale hyperbolique ſera la moitié du produit de cette circonférence par le rayon de la ſpirale; & ſi $y = a$, la ſurface correſpondante ſera égale au cercle générateur. On comprend ici non-ſeulement la ſurface compriſe entre le centre & la ſpire qui eſt terminée au point auquel répond le rayon a, mais encore la ſomme des ſurfaces des ſpires intérieures. Si l'on ſuppoſe $y = \frac{1}{2}\,a$, en retranchant $\frac{1}{4}\,a\,c$ de $\frac{1}{2}\,a\,c$, on aura $\frac{1}{4}\,a\,c$, qui (ſelon la remarque du N°. 25.) ſera la ſurface compriſe entre le centre & la ſpire, à l'extrémité de laquelle aboutit le rayon $y = a$.

29. PROBLÊME. *Quarrer la ſpirale logarithmique, que je ſuppoſerai repréſentée par la* (Fig. 17.). L'angle C M T que fait le rayon avec la courbe ou ſa tangente étant conſtant, nous ferons la tangente de cet angle $= a$; donc en ſuppoſant le ſinus total $= 1$, le triangle rectangle M n m donnera $1 : m\,n :: a :$ M n, ou $1 : dy : a : dx = a\,dy$. Subſtituant cette valeur de dx dans la formule $\frac{1}{2}\,y\,dx$, l'on aura $\frac{1}{2}$ S. $y\,dx = \frac{1}{2}$ S. $a\,y\,dy = \frac{1}{4} \cdot a\,y^2$. Maintenant ſi l'on ſuppoſe tirée la tangente T M & la ſous-tangente C T, le triangle rectangle M C T, donne $1 :$ C M $:: a :$ C T, ou $1 : y :: a :$ C T $= \frac{a\,y}{1} = a\,y$; & ſi l'on multiplie C T $= a\,y$, par $\frac{y}{2}$,

l'on aura l'aire du triangle M C T $= \frac{a y^2}{2}$;

donc ce triangle eſt double de l'aire compriſe entre la courbe & le rayon C M.

Mais ſelon la remarque du N°. 25, il faudra en retrancher l'intégrale qui répond à l'ordonnée de la ſpire précédente.

DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

30. *Rectifier une courbe c'eſt trouver une ligne droite égale à cette courbe.*

Soit A M (Fig. 1re.) une courbe quelconque dans laquelle les ordonnées ſoient perpendiculaires aux abſciſſes A P $= x$. Si l'on fait l'arc A M $= s$, l'arc infiniment petit M m ſera $= ds$; or le triangle rectangle M m R donne M $m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; il ne s'agit donc plus que d'intégrer $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; pour cela, on cherchera la valeur de dx ou celle de dy, qu'on ſubſtituera à la place de dx ou de dy, & enſuite l'on intégrera.

31. PROBLÊME. *Rectifier le cercle.* En comptant les abſciſſes du ſommet (Fig. 3.), l'on aura $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $dy = \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, $dy^2 = dx^2 . \frac{(a-x)^2}{2ax - xx}$. Subſtituant cette valeur de dy^2 dans $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, l'on aura $\sqrt{(dx^2 + \frac{dx^2 . (a-x)^2}{2ax - xx})} = \frac{\sqrt{a}\,dx^2}{\sqrt{(2ax - xx)}}$

$$= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = a\,dx.(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}.$$

Réſolvant $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$, en une ſérie infinie par la méthode ordinaire *, multipliant enſuite tous les termes par $a\,d\,x$ & intégrant l'on aura l'arc $s = AM = (2ax)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.x^{\frac{3}{2}}}{2.3.(2a)^{\frac{1}{2}}}$

$$+ \frac{1.3.x^{\frac{5}{2}}}{2.4.5(2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.5.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7.(2a)^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Si l'on fait $x = AC = a$, l'on aura la valeur d'un arc de 90°. dont le quadruple donnera la longueur entiere de la circonférence.

Si l'on veut compter les abſciſſes du centre C, en faiſant $CP = x$, $CA = a$, l'on aura $PM = y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{aa - xx}$,

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = a\,dx.$$

$(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Réduiſant $(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ en ſérie, multipliant tous les termes de cette ſérie par $a\,d\,x$, & intégrant, l'on aura l'arc $DM = x + \frac{1.x^3}{2.3a^2}$

$$+ \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \&c.$$ Si

* On peut, pour plus de facilité, faire d'abord $2a = c$, & ſubſtituer enſuite dans la ſérie $2a$ au lieu de c.

l'on fait $x = a$, l'on aura le quart de cercle $DAC = a + \frac{a}{2.3} + \frac{3a}{2.4.5} + \frac{15a}{2.4.6.7}$ &c.

Si l'on fait $x = \frac{a}{2}$, comme x eſt le co-ſinus de l'arc DM, & par conſéquent le ſinus de MD, & que le ſinus de l'arc de 30° eſt égal à la moitié du rayon, ainſi qu'on l'a dit dans la trigonométrie, l'arc DM ſera $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2^3.2.3} + \frac{3.a}{2^5.2.4.5} + \frac{2.5.a}{2^7.2.4.6.7}$ &c. ſérie aſſez convergente. Multipliant cette ſérie par 12, l'on aura la longueur du cercle entier.

Pour rectifier le cercle par le moyen d'une tangente, AT $= x$, l'on n'a qu'à ſe rappeller qu'on a trouvé ci-deſſus (14) l'arc élémentaire $ri = \frac{aadx}{aa + xx}$. Or $\frac{a^2}{aa + xx} = a^2(aa + xx)^{-1}$ élevant donc $aa + xx$ à la puiſſance -1, par le binome de Newton, multipliant enſuite tous les termes de la ſérie par $aadx$, & intégrant, l'on aura l'arc $Ar = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6}$ &c. $= x.(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4}$ &c.) $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ &c. en faiſant $a = 1$.

Si l'arc Ar eſt ſuppoſé de 45°, ſa tangente ſera égale au rayon du cercle; donc cet arc ſera $= (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c.) Maintenant nous avons vu dans la premiere partie de

cet ouvrage, (Voyez la Géométrie) que si l'on a deux arcs a & b, l'on aura tang. $(a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ . tang. } b}$, en faisant le rayon $= 1$; donc si l'on suppose que deux arcs p & q pris ensemble valent 45°, comme la tangente de 45° est égale au rayon, l'on aura $\frac{\text{tang. } p + \text{tang. } q}{1 - \text{tang. } p \text{ . tang. } q} = 1$, ou tang. p + tang. $q = 1 -$ tang. $p \times$ tang. q, ou tang. q + tang. p . tang. $q = 1 -$ tang. p, ou tang. $q = \frac{1 - \text{tang. } p}{1 + \text{tang. } p}$. Si l'on suppose que la tangente de l'arc p soit $= \frac{1}{2}$, l'on aura tangente $q = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. Maintenant si dans la série $x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} \text{ &c.}\right)$ On suppose $a = 1$ & $x = \frac{1}{2}$, & ensuite $x = \frac{1}{3}$; l'on aura dans le premier cas $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \text{ &c.}\right)$, & dans le second cas $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} \text{ &c}\right)$.

Si l'on prend la valeur des quinze premiers termes de la premiere série (en s'en tenant à dix décimales), pour l'ajouter à la valeur des dix premiers termes de la seconde; l'on aura $1 \cdot (0.7853981634) = a \cdot (0.7853981634)$. En exprimant le rayon par a, au lieu de l'exprimer par 1; donc l'arc de 45°, pris dans un cercle dont le

le rayon est $= a$, sera à peu près égal à cette quantité, & si l'on multiplie par 4, l'on aura la demi-circonférence $= a.(3.1415926536)$; donc le rayon sera à la demi-circonférence, ou le diamètre sera à la circonférence, comme $a : a.(3.1415926536) :: 1 : 3.1415926536$ à peu près. L'on auroit un rapport plus exact, en calculant un plus grand nombre de termes dans les séries ci-dessus.

32. PROBLÊME. *Rectifier un arc* D*n de cicloïde.* (Fig. 7.) En supposant le diamètre du cercle générateur $= a$, l'ordonnée P$n = y$, $ir = ns$ sera $= dy$; or on a vu ci-dessus (15) que $ns = \frac{dx\sqrt{(ax - xx)}}{x}$; donc $dy = dx \times \frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{x}}$; $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + dx^2 \times \frac{(a-x)}{x}\right)} = \frac{\sqrt{(a\,dx^2)}}{\sqrt{x}} = a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$ dont l'intégrale est $= \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{ax}$; or la corde DM est moyenne proportionnelle entre le diamètre DC & la partie DP. (Voyez la géométrie.) Donc cette corde $= \sqrt{a.x}$; donc l'arc cicloïdal Dn est double de la corde correspondante du cercle générateur; ainsi l'arc DA est double du diamètre & la cicloïde entiere est quadruple du diamètre du cercle générateur.

33. PROBLÊME. *Rectifier l'hyperbole* MS, *supposée équilatere & rapportée à ses asymptotes* (Fig. 4).

Supposant que $AR = RS = a = 1$, $rR = x$, l'on aura $y \cdot (1 + x) = a\,a = 1$ *, $y = \frac{1}{1+x} = 1 \cdot (1+x)^{-1}$, $dy = -dx \cdot (1+x)^{-2}$, $dy^2 = dx^2 \cdot (1+x)^{-4}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + (1+x)^{-4})}$. Réduisant en série la quantité sous le signe par la formule $(a+b)^m$, en faisant $a = 1$, $b = (1+x)^{-4}$, $m = \frac{1}{2}$, l'on aura $1 + \frac{1}{2}(1+x)^{-4} - \frac{1}{8}(1+x)^{-8}$ &c. Multipliant tous les termes par dx, & intégrant en ajoûtant une constante C, l'on a l'arc indéfini $Su = x - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (1+x)^{-3} + \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7}$ &c. $+ C$. Pour déterminer la constante C, je remarque que l'arc Su doit être $= 0$, lorsque $x = 0$; mais alors la série devient $-\frac{1}{6} + \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c.; donc $C = +\frac{1}{6} - \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c. & l'intégrale complette est $x - \frac{1}{2 \cdot 3} \times (1+x)^{-3} + \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot (1+x)^{-7}$ &c. $+ \frac{1}{6} - \frac{1}{7 \cdot 8}$ &c.

* Car l'équation de l'hyperbole équilatere rapportée aux asymptotes est $y \cdot x = a^2$; mais alors $Ar = x$, & ici l'on fait $Ar = 1 + x$.

Si l'on compte les abſciſſes depuis le centre A, & qu'on faſſe ces abſciſſes $= z$, les ordonnées R S $= u$, l'on aura $uz = a.a$, $u = aa.z^{-1}$, $du = aa.z^{-2}dz$, (car l'ordonnée u diminuant l'abſciſſe z augmente), & alors l'élément ds de l'arc ſera $= \sqrt{(du^2 + dz^2)} = dz\sqrt{(1 + a^4z^{-4})} = \frac{dz}{z^2} \times \sqrt{(z^4 + g^2)}$, en faiſant $a^2 = g$, & multipliant la quantité ſous le ſigne par z^4, & diviſant la quantité hors du ſigne par $(z^4)^{\frac{1}{2}} = z^2$.

34. PROBLÈME. *Rectifier la tractrice* A M. (Fig. 6.) Soit la tangente M T $= a$, l'ordonnée P M $= y$, l'élément M m ſera $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mais (13) $dx = \frac{-dy\sqrt{(aa - y^2)}}{y}$; donc $dx^2 = dy^2 \cdot \frac{(a^2 - y^2)}{y^2}$, & $Mm = ds = \sqrt{(dy^2 \cdot \frac{(aa - yy)}{y^2} + dy^2)} = \sqrt{(a^2 \cdot \frac{dy^2}{y^2})} = \frac{a\,dy}{y}$; dont l'intégrale ou l'arc A M eſt $= a$ L. y. Si ſur B D priſe pour aſſymptote l'on décrit une logarithmique A b dont la ſous-tangente ſoit égale à la tangente a de la tractrice, que l'on prolonge les lignes M F, $m\,f$, juſqu'à la rencontre de la logarithmique aux points s & t, deſquels on abaiſſera les perpendiculaires (à l'aſſymptote) s H, $t\,z$ qui ſeront égales aux ordonnées P M, $p\,m$; on aura P M $= y = s$ H, $is = $ M R $= -dy$ (parce que y va en diminuant, tandis que l'abſciſſe augmente.) Je dis qu'en faiſant B H $= x$, l'on a B H égale à l'arc AM; car puiſque la ſous-tangente de la logarithme eſt $= a$, l'on a par la ſection précédente (23) S. $\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, ou (parce qu'on prend ici les x négatives à cauſe que l'ordonnée H s eſt plus petite que B A $= a$, ou ce qui revient au même, parce que les ordonnées ſituées à la gauche de A B, d'où l'on commence à compter les logarithmes, répondent à des x négatives), S. $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{a}$, d'où l'on tire $-x = \frac{a\,S.\,dy}{y} = a$ L. $y =$ AM; donc B H $=$ A M.

35. PROBLÈME. *Rectifier la parabole de l'équation* $y^3 = ax^2$, l'on a $x^2 = \frac{y^3}{a}$, $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx^2 = \frac{9}{4a} \cdot y \cdot dy^2$ & l'élément $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$. En intégrant par la regle fondamentale, l'on aura $\frac{dy(1+\frac{9y}{4a})^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27} \cdot (1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C, je remarque qu'en ſuppoſant que A M (Fig. 1re.) déſigne la branche qu'on veut rectifier, l'arc A M doit être $= o$, lorſque $y = o$; or alors on a $\frac{8a}{27} \times (1)^{\frac{3}{2}} + C$; donc $\frac{8a}{27} + C = o$, ou $C = -\frac{8a}{27}$, & l'intégrale complette eſt $\frac{8a}{27}(1 + \frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Il y a une infinité de paraboles exactement rectifiables. Pour le faire voir, ſoit l'équation générale des paraboles $y^{m+n} = a^m \cdot x^n$, ou $y = a^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}} = cx^u$, en faiſant $a^{\frac{m}{m+n}} = c$, & $\frac{m}{m+n} = u$; donc $dy = u \cdot c \cdot x^{u-1} \cdot dx$, $dy^2 = u^2 c^2 \cdot x^{2u-2} dx^2$, $ds =$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(dx^2+uu.C^2x^{2u-2}.dx^2)}=dx\sqrt{(1+u^2c^2x^{2u-2})}$. Cette quantité ſera intégrable ſi $2u-2=1$; parce que la quantité hors du ſigne ſera la différentielle de la quantité ſous le ſigne, en diviſant par une conſtante, ou ſi l'on veut parce que l'expoſant 0 de x (car $dx=x^0\times dx$) hors du ſigne, étant augmentée d'une unité ſera diviſible par l'expoſant de la quantité ſous le ſigne & donnera pour quotient un nombre entier poſitif=1. Mais en changeant le ſigne de l'expoſant de x ſous le ſigne, l'on aura $x^{n-1}.dx\sqrt{(x^{-2u+2}+u^2c^2)}$ différentielle qui eſt intégrable ſi $(u-1)$ augmenté d'une unité; c'eſt-à-dire, ſi u eſt exactement diviſible par $-2u+2$, & donne pour quotient un nombre entier poſitif, ou ſi l'on a $\frac{u}{-2u+2}=p$, nombre entier poſitif. De cette équation l'on tire $u=2p-2u.p$, $u+2u.p=2p$, $u=\frac{2p}{2p+1}=\frac{n}{m+n}$, ou $2p.m+2p.n=2p.n+n$, $2pm=n$, $m=\frac{n}{2p}$, $m+n=\frac{n}{2p}+n=\frac{(2p+1).n}{2p}$, & l'équation $y^{m+n}=a^m x^n$ devient $y^{\frac{(2p+1).n}{2p}}=a^{\frac{n}{2p}}x^n$, & en tirant la racine n, $y^{\frac{2p+1}{2p}}=a^{\frac{1}{2p}}x$; & toutes les paraboles qui ſont compriſes dans cette équation, ſont exactement rectifiables, en ſuppoſant que p déſigne un nombre entier poſitif. Si $p=3$, l'on aura $y^{\frac{7}{6}}=a^{\frac{1}{6}}x$, & la parabole de cette équation ſera exactement rectifiable.

36. PROBLEME. *Rectifier la parabole ordinaire dont l'équation eſt* $y^2=ax$, $2ydy=adx$, $dx=\frac{2ydy}{a}$, $dx^2=\frac{4y^2.dy^2}{a^2}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy}{a}.\sqrt{(a^2+4y^2)}$. En réduiſant en ſérie la quantité ſous le ſigne, multipliant enſuite les termes de la ſerie par $\frac{dy}{a}$, & intégrant, l'on aura

l'arc AM (Fig. 1.) $= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}$ &c. Si a étoit plus petit que y, l'on éléveroit $4y^2 + a^2$ à la puiſſance $\frac{1}{2}$ en prenant $4y^2$ pour le premier terme, & l'on intégreroit après avoir multiplié la ſérie qui en réſulteroit par $\frac{dy}{a}$.

Soit ſuppoſée décrite l'hyperbole équilatere BN (Fig. 18. A) dont le demi-axe BA ſoit égal au demi-paramètre $\frac{a}{2}$ de la parabole AM. Par la nature de l'hyperbole équilatere, $y^2 = x^2 - \frac{a^2}{4}$, ou $x^2 = y^2 + \frac{a^2}{4}$, $x = \sqrt{(y^2 + \frac{a^2}{4})}$; donc en ſuppoſant que A eſt le centre de l'hyperbole, AH le ſecond axe, l'on aura $Af = x = hn = \sqrt{(yy + \frac{aa}{4})}$; car $PM = y = nf$; donc $iN = hH = dy$, & l'élément $hHNn$ de la ſurface hyperbolique compriſe entre la courbe & le ſecond axe (prolongé s'il le faut) eſt $dy\sqrt{(\frac{aa}{4} + yy)} = \frac{1}{2}dy\sqrt{(aa + 4yy)}$; donc l'eſpace hyperbolique AHBN diviſé par le demi-parametre $\frac{a}{2}$ de la parabole, donne l'arc parabolique correſpondant AM; donc la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, réciproquement ſi l'on avoit l'arc parabolique AM en le multipliant par $\frac{a}{2}$, l'on auroit la quadrature de l'eſpace hyperbolique correſpondant.

37. PROBLEME. *Rectifier un arc d'ellipſe* DM. (Fig. 9.) Soit le demi-grand axe $= a$, le demi-petit axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx)$ (en comptant les abſciſſes CP du centre) $= b^2 - \frac{bb}{aa}xx$, $2xdx = -2\frac{b^2}{a^2} \times xdx$, $dx = -\frac{b^2 x\,dx}{a^2 y}$, $dy^2 = \frac{b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} =$ (en ſubſtituant pour y^2 ſa valeur priſe de l'équation de la courbe) $\frac{b^2 x\,dx^2}{a^2(aa - xx)}$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{b^2 x^2 dx^2}{a^2(a^2 - x^2)})} = dx\sqrt{(1 + \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2})}$. Ré-

ſolvant en ſérie la quantité ſous le ſigne en faiſant dans la formule $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b$ &c. $a=1$, $b = \frac{b^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}$, multipliant enſuite tous les termes de la ſérie par dx, intégrant, & réduiſant, l'on aura l'arc DM $= x + \frac{b^2 x^3}{6a^4} + \frac{(4a^2 b^2 - b^4) x^5}{40 . a^8} + \frac{(8a^4 b^2 - 4a^2 b^4 + b^6) x^7}{112 a^{12}}$ + &c. Si l'on fait $x = a$ l'on aura le quart d'ellipſe D M $= a + \frac{b^2}{6a}$ + &c.

38. PROBLEME. *Rectifier un arc hyperbolique.* Soit ſuppoſée A M (Fig. 1.) une hyperbole dont le demi-premier axe $= a$, le demi-ſecond axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - aa)$, $dy = \frac{b^2 x dx}{a^2 y}$, $dy^2 = \frac{b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} = \frac{b^2 x^2 dx^2}{a^2 x^2 - a^4}$, en ſubſtituant la valeur de y^2 priſe de l'équation de la courbe; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \times \sqrt{(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 x^2 - a^4})}$, différentielle qu'il ne ſera pas difficile d'intégrer en la réduiſant en une ſérie.

REMARQUE. Si l'on fait $z = x$, cette différentielle ſera $= dz \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{z^2}{z^2 - a^2})}$. En ſuppoſant $\frac{bb}{aa} = g$, multipliant & diviſant par $z^2 - a^2$, la quantité ſous le ſigne deviendra $\frac{z^2 - a^2 + g z^2}{z^2 - a^2} = \frac{(g+1) . z^2 - a^2}{z^2 - a^2}$; donc la différentielle ſera $= \frac{dz \sqrt{((g+1) . z^2 - a^2)}}{\sqrt{(zz - aa)}}$; ſuppoſant maintenant $(g+1) . z^2 - a^2 = ax$ *, ou $z^2 = \frac{ax + aa}{g+1}$, on trouve $2z dz = \frac{a dx}{g+1}$, $dz = \frac{a dx}{2z(g+1)} = \frac{a dx}{\sqrt{(g+1) . 2\sqrt{(ax + aa)}}}$, & $\frac{dz \sqrt{((g+1) . z^2 - a^2)}}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$

* x n'exprime pas ici l'abſciſſe de la courbe.

$= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x+a).\sqrt{(x-ga)}}} = \frac{dx\sqrt{ax}}{2.\sqrt{(xx+ax.(1-g)-gaa)}}$

$= \frac{dx\sqrt{ax}}{2.\sqrt{\left(xx+x\left(\frac{aa-bb}{a}\right)-bb\right)}}$, en remettant la valeur de g. Si l'hyperbole eſt équilatere, alors $b=a$ & la différentielle devient $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2.\sqrt{(xx-bb)}}$. Si l'on fait $\frac{aa-bb}{a} = \pm p$, la différentielle deviendra $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2.\sqrt{(xx\pm px-bb)}}$. Le ſigne + a lieu ſi a eſt plus grand que b, & le ſigne $-$ ſi $b > a$.

S'il s'agit de l'hyperbole rapportée au ſecond axe, l'abſciſſe ſur ce ſecond axe étant z, l'ordonnée étant u, l'on aura $uu = \frac{aa}{bb}.(zz+bb)$ (par la nature de la courbe) $= g.(zz+bb)$, en faiſant $\frac{aa}{bb} = g$. L'on aura donc $u\,du = g.z\,dz$, & alors l'élément de l'arc hyperbolique ſera $= \sqrt{(dz^2+du^2)}$; donc à cauſe de $du = \frac{gz\,dz}{u}$ & de $du^2 = \frac{g^2z^2dz^2}{u^2} = \frac{gz^2dz^2}{zz+bb}$, cet élément ſera $= \frac{dz\sqrt{((g+1)z^2+b^2)}}{\sqrt{(zz+bb)}}$. En ſuppoſant $(g+1).z^2+b^2 = bx$, ou $z^2 = \frac{bx-bb}{g+1}$, on aura $2z\,dz = \frac{b\,dx}{g+1}$, & à cauſe de $z = \sqrt{\frac{bx-bb}{g+1}}$, l'on a $dz = \frac{b\,dx}{2.z(g+1)} = \frac{b\,dx}{\sqrt{(g+1).2\sqrt{(bx-bb)}}}$ & $\frac{dz\sqrt{((g+1).z^2+b^2)}}{\sqrt{(zz+bb)}}$

$$= \frac{dx\sqrt{bx}}{2\cdot\sqrt{(xx+bx.(g-1)-gbb)}} =$$

$$\frac{dx\sqrt{bx}}{2.\sqrt{\left(xx+x.\left(\frac{a^2-bb}{b}\right)-aa\right)}} = \sqrt{(dz^2+du^2)}$$

On a trouvé ci-dessus (33.) que la différentielle de l'arc hyperbolique en rapportant la courbe aux asymptotes & faisant $g=aa$, étoit $=\frac{dz}{zz}\sqrt{(z^4+g^2)}$. Si l'on fait $z=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, cette différentielle deviendra $=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx\sqrt{(xx+g^2)}$; car alors $dz=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$.

L'on a trouvé (37) que l'élément de l'arc elliptique étoit $=\sqrt{(dx^2+\frac{b^2.x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)})}$. Si l'on fait $z=x$ & $\frac{b^2}{a^2}=g$, cet élément devient $=dz\sqrt{(1+\frac{g.z^2}{a^2-z^2})}$ $=\frac{dz\sqrt{(a^2-z^2+gz^2)}}{\sqrt{(aa-z^2)}}=dz.\frac{\sqrt{(g-1).z^2+a^2}}{\sqrt{(aa-z^2)}}$.

En supposant $(g-1).zz+aa=ax$, ou $zz=\frac{ax-aa}{g-1}$, l'on aura $2zdz=\frac{adx}{g-1}$, $dz=\frac{adx}{(g-1).2z}=$ $\frac{adx}{\sqrt{(g-1).2\sqrt{(ax-aa)}}}$, & en faisant l'ordonnée $=u$, l'on aura $\sqrt{(du^2+dz^2)}=\frac{dx\sqrt{ax}}{2.\sqrt{(ax.(g+1)-xx-gaa)}}$

$$= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{\left(x.\left(\frac{aa+bb}{a}\right)-xx-bb\right)}} = \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(px-xx-bb)}},$$

p étant une quantité positive $=\frac{aa+bb}{a}$. Il faut bien se souvenir que dans ces formules x n'est pas l'abscisse de la courbe.

39. Si l'angle des ordonnées & des abscisses n'étoit pas droit, la formule de l'élément ds seroit différente. Soit (Fig.

14.) l'angle M P N $= z$, en ſuppoſant M n parallele aux x $=$ A P, l'angle M $n p$ ſera égal à ſon alterne interne $n p$ N $= z$. Je tire M R perpendiculaire à l'ordonnée $m p$, le triangle rectangle M n R, donne (en faiſant le ſinus total $= r$) r : cof. z :: M $n = dx$: n R $= \frac{dx \cdot \text{cof. } z}{r}$.

Le même triangle donne (M R)$^2 = dx^2 - \frac{dx^2 (\text{cof. } z)^2}{r^2}$

Or R m = R n + $n m = \frac{dx \text{ cof. } z}{r} + dy$ *, & le triangle rectangle M m R donne (M m)$^2 = (ds)^2 =$ (R m)^2 + (M R)^2, ou $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 \pm \frac{2. \text{cof. } z}{r} \times dx\,dy)}$. Le ſigne + a lieu lorſque l'angle z eſt aigu & le ſigne — ſi cet angle eſt obtus.

Si une courbe A B étoit rapportée au foyer C (Fig. 15), en décrivant du point C avec le rayon C B $= y$ l'arc infiniment petit B n, l'on auroit B $b = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, formule dans laquelle il faut éliminer dx qui eſt un arc décrit d'un rayon variable; par conſéquent on ne peut trouver l'intégrale qu'en chaſſant dx.

40. PROBLÊME. *Rectifier la ſpirale d'archimedes* (Fig. 16). En faiſant C A $= a$, la circonférence de ce rayon $= c$, l'arc A M $= z$, le rayon C B de la ſpirale $= y$, l'on aura $a z = c y$, $a . dz = c\,dy$. Ayant décrit du point C, l'arc infiniment petit B n, l'on aura M $m = dz$: B $n = dx$: : a : y, ou $dx = \frac{y\,dz}{a}$, $dx^2 = \frac{y^2 dz^2}{aa}$; mais $dz = \frac{c\,dy}{a}$; donc $dx^2 = \frac{y^2 c^2 dy^2}{a^4}$,

* Si l'angle z = M n R étoit obtus, le point R tomberoit entre n & m & l'on auroit R $m = dy = \frac{dx \cdot \text{cof. } z}{r}$.

$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{y^2 c^2}{a^4})}$

$= \frac{c}{a^2} . dy . \sqrt{(y^2 + \frac{a^4}{c^2})}$, différencielle qu'on peut facilement intégrer par les séries.

Nous avons trouvé ci-dessus (36.) que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire de l'équation $y^2 = ax$ est $= \frac{dy}{a}\sqrt{(aa + 4y^2)}$, cette quantité est $= \frac{2\,dy}{a} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa + y^2)}$, a étant le paramètre ; c'est-à-dire, que l'élément de l'arc de la parabole ordinaire AM (Fig. 1.) est égal à la différentielle dy, divisée par la moitié du paramètre & multipliée par la racine de la somme des quarrés de l'ordonnée & du demi-paramètre ; donc (Fig. 16.) si sur CP (perpendiculaire à Cb prise pour axe), l'on décrit avec le paramètre $\frac{2aa}{c}$ la parabole CN, dont CP $= x$, PN $= Cb = y$, CN sera $= \frac{c}{a^2} S.\, dy.\sqrt{(y^2 + \frac{a^4}{c^2})}$; donc l'arc $Cfb =$ CN ; ainsi la rectification de la spirale d'Archimedes dépend de celle de la parabole ordinaire.

41. PROBLÊME. *Rectifier la spirale hyperbolique* CM (Fig. 17.) soit $= a$, le co-sinus de l'angle du rayon avec la courbe. Dans le triangle rectangle Mmn, l'on a (en faisant le sinus total $= 1$) $a : 1 :: mn = dy : Mm = ds = \frac{dy}{a}$; donc l'arc CM est $= \frac{y}{a}$; mais le triangle rectangle CMT donne $a : 1 :: y : MT = \frac{1 . y}{a} = \frac{y}{a}$; donc l'arc CM est égal à la tangente MT. Si l'angle de la courbe avec son rayon est de 45° degrés, le

triangle rectangle M C T ſera iſocelle, & l'on aura $MT = \sqrt{2y^2} = y\sqrt{2}$. On peut voir par-là, que quoique la courbe M C faſſe une infinité de révolutions autour de C avant de pouvoir parvenir à ce point, cependant ſa longueur eſt égale à une ligne finie M T. Nous ſuppoſons le rayon C M fini.

Ayant décrit un cercle d'un rayon $Cs = a$, par le point A ou la ſpirale coupe le cercle, je tire la ligne indéfinie C D & par le centre C la ligne C B perpendiculaire à C D. Entre les lignes CB, CD comme aſſimptotes, je décris l'hyperbole FH, dont la puiſſance ſoit $= aa$, & du Centre C, je décris l'arc n M D.

Maintenant ſi on ſuppoſe qu'en faiſant $As = \zeta$, $Ag = c$ *, l'on ait toujours $\zeta = c\,Ly$ **, l'on aura l'équation de la ſpirale logarithmique $d\zeta = e.\frac{dy}{y}$. Mais les ſecteurs ſemblables $Cs f$, CMn donnent $a : sf = d\zeta :: y : Mn = dx = \frac{y\,d\zeta}{a} = \frac{c}{a}\,dy$, en ſubſtituant la valeur de $d\zeta$; les mêmes ſecteurs donnent $y : dx = \frac{c\,dy}{a} :: Cs = a : sf = \frac{c\,dy}{y}$; donc l'arc $As = S.\frac{c\,dy}{y}$. Si l'on faiſoit $AD = x$ & $AC = b$, l'on auroit

* L'on pourroit ſuppoſer l'arc Ag égal à la circonférence du cercle.

** Si l'on fait $\zeta = n\,L\frac{y}{b}$, on aura encore une autre équation qui appartiendra à une ſpirale logarithmique.

l'eſpace F A H D $= S.\frac{a\,a\,dx}{b+x}$, comme cela eſt évident par ce qu'on a dit ci-deſſus (8); donc ſi on fait C M $=$ C D $= y$, $b+x$ ſera $= y$, $dx = dy$ & l'eſpace dont on vient de parler ſera $= S.\frac{a\,a\,dy}{y}$. Si l'on multiplie A s par a, il vient $S.\frac{c.a.dy}{y}$, & l'on a l'aire A F H D : a . A s : : $S.\frac{a\,a\,dy}{y} : S.\frac{c.a\,dy}{y} :: a : c$; donc AFHD $= \frac{a\,a}{c}$. A s. Suppoſons maintenant que l'arc A L ſoit tel que l'on ait $a : c ::$ A L : A s, l'on aura $\frac{a}{c} = \frac{AL}{As}$; donc l'eſpace hyperbolique A F H D ſera $= a$. A L. Si $a = c$, le point L tombera ſur le point s. Si le point M eſt dans la premiere ſpire * hors du cercle (à compter depuis le point A), l'arc A s ſera plus petit que la circonférence; s'il eſt dans la ſeconde ſpire, l'arc A s ſera égal à une circonférence entiere plus un arc moindre que la circonférence; s'il eſt dans la troiſieme, l'arc ſera compoſé de deux circonférences, plus un arc moindre que la circonférence; &c. Il faut dire la même choſe de la branche qui eſt renfermée dans le cercle. On peut voir par-là que ſi l'on connoiſſoit la longueur exacte de l'arc A s, l'on auroit la quadrature de l'eſpace hyper-

* Lorſque z eſt devenue égale à la circonférence, elle devient enſuite égale à une circonférence plus un arc compté depuis l'origine que je ſuppoſe en A, & ſi le point M eſt à l'extrémité de la premiere ſpire hors du cercle, l'arc A s ſera égal à la circonférence, &c.

bolique dont on vient de parler, & qu'il y a une très-grande connexion entre la quadrature de l'hyperbole & celle du cercle.

42. PROBLEME. *Rectifier la développante du cercle.* Soit A B (Fig. 15.) cette développante. Puiſque le rayon *s* B de la développée eſt toujours perpendiculaire à la ligne de développement, & que, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus(27.), en faiſant l'arc A *s* = *z* & le rayon CA = *a*, l'arc élémentaire B *b* ſera = $\frac{z\,dz}{a}$, l'intégrale $\frac{z^2}{2a}$ ſera = AB. Si *z* eſt égale à la circonférence *c* du cercle, la branche entiere A B ſera = $\frac{cc}{2a}$. Donc on aura $2a : c :: c : AB$, en ſuppoſant que A B déſigne toute la branche; c'eſt-à-dire, que le diamètre du cercle eſt à ſa circonférence comme cette circonférence eſt à la longueur de ſa développante; ou, ce qui revient au même, la circonférence du cercle eſt moyenne proportionnelle entre le diamètre & la développante.

COROLLAIRE I. Donc ſi on décrivoit un ſecond cercle dont le diamètre fût égal à la circonférence A *p* A, la circonférence d'un tel cercle ſeroit égale à la développante du cercle A *p* A. Si l'on décrivoit un troiſieme cercle dont le diametre fût égal à la circonférence du ſecond, la circonférence de ce troiſieme cercle, ſeroit égale à la développante du ſecond, & ainſi de ſuite. Si l'on décrit donc tant de cercles que l'on voudra dont les diamètres ſoient dans une progreſſion géométrique $\therefore a : b : c : D : e : f : g$ &c De maniere que *b* ſoit la circonférence du cercle dont *a* eſt le diamètre, *c* la circonférenee du cercle dont *b* eſt le diamètre, & ainſi de ſuite, la circonférence de chacun de ces cercles ſera égale à la développante de celui qui le précéde.

COROLLAIRE II. Si on ſe ſert du rapport d'Archimedes pour avoir la circonférence d'un cercle dont le diamètre ſeroit = $2a$, l'on aura $7 : 22 :: 2a : c = \frac{2 \cdot 22 \cdot a}{7}$; donc $\frac{cc}{2a}$, ou la développante ſera $\frac{2 \cdot 22 \cdot a \cdot 2 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot a} = \frac{2 \cdot 22 \cdot 22 \cdot a}{7 \cdot 7} = (19 + \frac{37}{49}) \cdot a$.

DE LA CUBATURE DES SOLIDES ET DE LA QUADRATURE DE LEUR SURFACE.

43. Nous considérons ici les solides, comme produits par la révolution d'un plan autour d'une ligne que l'on peut appeller *axe de rotation*. Si l'on conçoit que le plan de la courbe A M (Fig. 13,) se meut au-tour de l'axe A P, l'arc de courbe A M engendrera une surface convexe, & le plan A M P un solide. Soit le rapport du rayon à la circonférence égal à celui de $r : c$; l'on aura la circonférence décrite par le rayon $PM = y$ pendant la révolution de la courbe autour de A P, en faisant $r : c :: PM : \frac{c \cdot PM}{r} = \frac{c \cdot y}{r}$. Si l'on multiplie cette circonférence par la moitié du rayon y, l'on aura l'aire du cercle que décrit $PM = \frac{cy^2}{2r}$. Multipliant cette surface par $Pp = dx$, l'on aura un cylindre infiniment petit (engendré par le plan PMR*p*, cylindre qu'on peut regarder comme l'élément du solide cherché) $= \frac{cy^2 dx}{2r}$. Si on substitue dans cette formule la valeur de y^2 tirée de l'équation de la courbe ou du plan générateur, & qu'on integre, l'on aura le solide cherché.

Pendant que le plan de la courbe se meut autour de l'axe A P, l'arc infiniment petit M*m* décrit la surface latérale d'un cône tronqué

dont la hauteur eſt infiniment petite; pour avoir cette ſurface, il faut, ſelon ce qu'on a dit dans la géométrie (104.), multiplier le côté M m du cône tronqué par la circonférence qui paſſe par le milieu n du côté de ce cône, ou par la circonférence du rayon bn, qu'on peut ſuppoſer $= PM = y$; or $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſera l'élément de la ſurface cherchée. Si on ſubſtitue la valeur de y & de dy, ou bien celle de dx dans la formule que l'on vient de trouver, & que l'on integre, l'on aura la ſurface décrite par la ligne AM.

44. PROBLÊME. *Trouver la ſolidité & la ſuperficie de la ſphere* (Fig. 18). Soit le diamètre $AB = 2r$, l'abſciſſe $AP = x$, l'ordonnée $PM = y$, l'on aura par la nature du cercle générateur AMBN, $y^2 = 2rx - x^2$. Donc la formule $\frac{cy^2dx}{2r}$ devient $= cxdx - \frac{cxxdx}{2r}$ & S. $\frac{cy^2dx}{2r} = \frac{c}{2r}$. S. $yydx = \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{3.2r}$. Donc la portion de la ſphere engendrée par le demi-ſegment APM en tournant autour de l'axe AB eſt $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r} = \frac{3crx^2 - cx}{6r}$. Si l'on ſuppoſe $x = 2r$, la ſphere entiere ſera $= \frac{12.cr^3 - 8.c.r^3}{6r} = \frac{4e.r^3}{6r} = \frac{2}{3}.cr^2 =$ $2cr.\frac{1}{3}r$; or $\frac{cr}{2}$ déſigne un grand cercle de cette ſphere

&

& $2cr$ le quadruple de ce grand cercle; donc la solidité de la sphere est égale au quadruple d'un grand cercle de la sphere multiplié par le tiers du rayon, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit dans la géométrie.

Pour avoir la surface, je remarque que l'équation $y^2 = 2rx - x^2$ donne $y = (2rx - xx)^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{dx.(r-x)}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, $dy^2 = \frac{dx^2(r-x)^2}{2rx-xx}$. Substituant cette valeur de dy^2 dans la formule générale $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ & réduisant, il vient $\frac{cy}{r}.\sqrt{(\frac{r^2dx^2}{2rx-xx})} = \frac{crydx}{r.\sqrt{(2rx-xx)}}$. Si l'on divise le numérateur par y & le dénominateur par $\sqrt{(2rx-xx)} = y$, l'on a $\frac{crdx}{r}$, dont l'intégrale est $\frac{crx}{r}$. Si l'on fait $x = 2r$ l'on aura la surface entiere de la sphère $= \frac{2r.cr}{r} = 2.rc$; c'est-à-dire, la surface entiere de la sphere est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.

Si l'on avoit supposé le diamètre de la sphère $= 2a$, l'on auroit trouvé S. $\frac{cy}{r}.\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a.cx}{r}$. Si l'on fait $r : c :: a : z = \frac{ac}{r}$, l'on aura la circonférence d'un cercle dont le rayon est a; donc la surface d'une calotte sphérique N A M est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

45. PROBLÊME. *Cuber un conoïde parabolique d'un genre quelconque.* Supposons le paramètre de la parabole génératrice $= 1$, l'on pourra représenter toutes les paraboles par l'équation $x = y^m$; donc $y = x^{\frac{1}{m}}$, $y^2 = x^{\frac{2}{m}}$. Substituant cette valeur de y^2 dans la formule $\frac{c y^2 dx}{2r}$, il vient $\frac{c x^{\frac{2}{m}}}{2r} dx$, dont l'intégrale $\frac{m \cdot c x^{\frac{2+m}{m}}}{2r.(2+m)} = \frac{m \cdot c y^2 x}{4r + 2rm}$ est la valeur du solide formé par la révolution de la courbe autour de son axe. Si on fait $x = a$, & que cette courbe soit la parabole ordinaire (Fig. 1ere.), l'on aura $m = 2$; & le paraboloïde sera $= \frac{2c \cdot y^2 a}{8r}$. Si l'on suppose $y = PM = r$, le conoïde sera $= \frac{1}{2} cr \cdot \frac{a}{2}$. Or $\frac{1}{2} cr$ représente le cercle dont le rayon est $= r = PM$; donc le conoïde parabolique du premier genre est égal à la moitié d'un cylindre de même base & de même hauteur. Si $m = 3$, l'on aura $\frac{1}{2} rc \cdot \frac{3a}{5}$. C'est-à-dire, que le conoïde de la parabole de l'équation $y^3 = x$ est égal à un cylindre de même base, mais dont la hauteur est seulement les $\frac{3}{5}$ de la hauteur a du conoïde, & ainsi des autres.

46. PROBLÊME. *Trouver la surface d'un conoïde formé par la révolution de la demi-parabole ordinaire autour de son axe.* Soit supposée AM (Fig. 1ere.)

la courbe génératrice, dont l'équation soit $y^2 = ax$, l'on aura $adx = 2ydy$, $dx = \frac{2ydy}{a}$, $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{aa}$. Donc en substituant cette valeur de dx^2, l'on aura l'élément de la surface $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{cydy}{ar}\sqrt{(4y^2+aa)}$. Maintenant si l'on integre cette différentielle par la regle fondamentale *, la surface cherchée sera $= \frac{c}{12.ar}(4y^2+aa)^{\frac{3}{2}} + C$. Pour déterminer la constante C l'on remarquera qu'en faisant $y = 0$, la surface doit être $= 0$; donc $adx\frac{c}{12.ar}(aa)^{\frac{3}{2}} + C = 0$, ou $\frac{c}{12r}aa + C = 0$, ou $C = -\frac{caa}{12r}$; donc l'intégrale complette est $= \frac{c}{12ar} \times (4y^2+aa)^{\frac{3}{2}} - \frac{caa}{12r}$.

47. PROBLÊME. *Trouver la solidité d'un conoïde engendré par la révolution de la demi-parabole* AM *autour de la tangente* AB (Fig. 1ere.). Soit le paramètre $= a$, $Ai = Fn = x$, $in = AF = y$, $FB = dy$. Le cercle décrit avec le rayon

* C'est-à-dire, en augmentant l'exposant $\frac{1}{2}$ d'une unité, divisant par $\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$, & par la différentielle $8ydy$ de la quantité sous le signe.

FN sera $= \frac{c \cdot x x}{2r}$. Multipliant ce cercle par dy, l'on aura l'élément engendré par le plan BMFn $= \frac{c x^2 dy}{2r} = \frac{c y^4 dy}{2 a^2 r}$ (à cause de $x^2 = \frac{y^4}{aa}$, par la nature de la courbe), dont l'intégrale est $\frac{c y^5}{10 . a^2 r} = \frac{c a^2 x^2 y}{10 . a^2 r} = \frac{c x^2 y}{10 . r}$, en mettant $a^2 x^2$ au lieu de y^4. Si l'on suppose $x =$ AP $= b$, PM $= y = g$, le conoïde engendré par le plan AMB sera $= \frac{c b^2 g}{10 . r}$.

Mais le cercle dont b est le rayon est $= \frac{c b^2}{2r}$. Si l'on multiplie cette quantité par g, l'on aura un cylindre $\frac{c b^2 g}{2r}$, qui sera au solide qu'on vient de trouver comme $\frac{cb^2g}{2r} : \frac{c b^2 g}{10 . r} :: \frac{1}{2r} : \frac{1}{10r} ::$ $10r : 2r :: 10 : 2 :: 5 : 1$. Il n'est pas difficile de voir que le conoïde engendré par le plan APM est $= \frac{2 c b^2 g}{5 r}$.

48. PROBLÊME. *Trouver la solidité d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une hyperbole autour de son axe.* Soit supposée AM (Fig. 12) une hyperbole ordinaire, dont l'équation soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$. Si l'on fait $2a : 2b :: 2b : p$, l'on aura le paramètre $p = \frac{2b^2}{a}$ & $b^2 = \frac{ap}{2}$, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$. Ainsi l'équation

ſera $y^2 = \frac{p}{2a} \sqrt{(2ax + xx)}$. Si l'on fait le premier axe $= a$, cette équation ſera $y^2 = \frac{p}{a} \sqrt{(ax + xx)}$; donc $\frac{c}{2r}$ S. $y^2 dx$ eſt $= \frac{pc}{2ra} \times$ S. $(axdx + x^2 dx) = \frac{pc}{2ra} \cdot \left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$. Si on ſuppoſe $x = a$, le conoïde hyperbolique devient $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{p}{a} \left(\frac{5a^3}{6}\right) = \frac{c \cdot p}{2r} (5a^2)$. Si l'on fait $r : c :: a : \frac{ca}{r}$, l'on aura la circonférence du rayon a, & multipliant cette circonférence par $\frac{a}{2}$ l'on aura la ſurface du cercle du rayon $a = \frac{ca^2}{2r}$. Multipliant cette ſurface par $\frac{5p}{6}$, l'on aura un cylindre dont la hauteur ſeroit $\frac{5p}{6}$, & ce cylindre ſera à un cylindre de même baſe, mais dont la hauteur ſeroit $= a$, comme $\frac{5p}{6} : a :: 5p : 6a$. Ainſi un conoïde hyperbolique dont la hauteur eſt égale au premier axe, eſt au cylindre de même baze & de même hauteur, comme le quintuple du paramètre du premier axe eſt au ſextuple de cet axe. Si l'hyperbole eſt équilatere, alors $p = a$ & le conoïde hyperbolique dont la hauteur eſt égale à l'axe, eſt au cylindre de même baſe & de même hauteur comme 5 : 6.

49. PROBLÊME. *Trouver la ſurface d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole équilatere autour de ſon axe.* En faiſant le

demi-axe CA $= a$, l'on a $y^2 = x^2 - aa$, en comptant les abſciſſes CP (Fig. 12) du centre. Donc $y = V(xx - aa)$, $dy = \frac{x\,dx}{V(xx-aa)}$; donc

$$S.\frac{cy}{r}.V(dx^2+dy^2) = S.\frac{c\,dx}{ar}.V(2aax^2-a^4)$$

$$= S.\frac{c\,g\,dx}{ar}\left(x^2-\frac{a^4}{g^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$ (en faiſant $2aa = g^2$ & diviſant ſous le ſigne par g^2 & multipliant hors du ſigne par g) $= S.\frac{c\,g\,dx}{a.r}.(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$, en faiſant $\frac{a^4}{g^2} = \frac{a^2}{2} = b^2$; on pourra intégrer par les ſéries.

50. PROBLÊME. *Trouver la ſolidité d'un conoïde hyperbolique produit par le plan* D g A C, *lorſque l'hyperbole* A g *fait ſa révolution autour du ſecond axe* C D (Fig. 11). En faiſant le demi-premier axe $= a$, le demi-ſecond axe $= b$, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ou $x^2 = \frac{aa}{bb} \times (yy + bb)$. La circonférence du cercle décrit avec le rayon CP $=$ H G eſt $= \frac{cx}{r}$ & ſa ſurface eſt $= \frac{cx^2}{2r}$. Si l'on multiplie cette ſurface par H D $= m\,g = dy$, l'on aura $\frac{cx^2}{2r}dy$, élément du ſolide produit par le plan D g H G. Si dans cet élément on ſubſtitue la valeur de xx, l'on a $\frac{c.aa}{2r.bb}(y^2\,dy + bb\,dy)$, dont l'intégrale eſt

$\frac{caa}{2rbb}\left(\frac{y^3}{3}+bby\right)=\frac{c}{2r}\left(\frac{aa}{3bb}y^3+aay\right)$.

Si l'on ſuppoſe $pg=y=b$, le conoïde devient $=\frac{c}{2r}\left(\frac{a^2b}{3}+a^2b\right)=\frac{c}{2r}\left(\frac{4}{3}a^2b\right)$ $=\frac{ca^2}{2r}\cdot\left(\frac{4}{3}b\right)$. Mais $\frac{ca^2}{2r}$ déſigne la ſurface d'un cercle dont le rayon eſt $=a$; donc le conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'hyperbole autour du ſecond axe & dont la hauteur eſt égale au demi-ſecond axe b eſt les $\frac{4}{3}$ d'un cylindre de même baze & de même hauteur.

Si du ſolide dont on vient de parler, on retranche le cylindre C A b D, on aura le ſolide engendré par le plan b A g.

51. PROBLÊME. *Trouver la ſolidité d'un conoïde hyperbolique engendré par le plan* SRmu *pendant que l'hyperbole* FMS, *que nous ſuppoſons équilatere, tourne autour de l'aſſymptote* AR (Fig. 4). Soit l'équation de l'hyperbole équilatere $yx=a^2$ & ſoit auſſi ſuppoſée AR$=$RS$=a$, l'on aura $y^2=\frac{a^4}{xx}$; donc $\frac{c}{2r}\times$ S. $y^2dx=\frac{c}{2r}\cdot$S.$\frac{a^4}{x^2}dx=\frac{c}{2r}$ S. $a^4x^{-2}.dx$ $=-\frac{c}{2r}a^4x^{-1}+$ C. Pour déterminer la conſtante C, je remarque que le ſolide cherché doit être $=0$, lorſque x eſt $=$ A R $=a$; donc $-\frac{c}{2r}a^3+C=0$, ou C $=+\frac{ca^3}{2r}$, & l'intégrale complette eſt $=\frac{ca^3}{2r}-\frac{ca^4}{2rx}$. Si on ſuppoſe $x=\infty$, ce ſolide devient $=\frac{ca^3}{2r}$. Or $\frac{ca^2}{2r}$ déſigne un

cercle dont le rayon eſt $= a$, & $\frac{ca^2a}{2r} = \frac{ca^3}{2r}$ déſigne un cylindre dont le rayon de la baſe ſeroit $= a$ & la hauteur $= a$, ou un cylindre décrit par la révolution du plan A R S T autour de A R ; donc ce cylindre eſt égal au conoïde infiniment long, décrit par le plan R S *m u*.

52. PROBLÊME. *Trouver le ſolide engendré par le plan* N P *a m, pendant que la logarithmique fait une révolution autour de ſon aſſymptote* P *a* (Fig. 5). La ſous-tangente de cette courbe étant ſuppoſée $= a$, l'on aura $\frac{y\,dx}{dy} = a$, $dx = \frac{a\,dy}{y}$; donc $\frac{c}{2r}$ S. $y^2\,dx = \frac{c}{2r}$ S. $a\,y\,dy = \frac{c}{2r}.\frac{a\,y^2}{2} = \frac{c\,y^2}{2r}.\frac{a}{2}$. Si l'on ſuppoſe que y = P N eſt $= b$, le ſolide produit par l'eſpace infiniment long N *m a* P, ſera $= \frac{c\,b\,b}{2r}.\frac{a}{2}$. Or $\frac{c\,b^2}{2r}$ déſigne la ſurface d'un cercle dont le rayon $= b$; donc ce ſolide eſt la moitié d'un cylindre dont le rayon de la baſe eſt l'ordonnée de la logarithmique, & la hauteur, la ſous-tangente de la logarithmique.

53. PROBLÊME. *Trouver, 1°. la ſolidité, 2°. la ſurface convexe d'un ſolide formé par un plan* B M *b qui coupe obliquement un cylindre droit, de maniere que la ſection paſſe par le centre de la baſe du cylindre* (Fig. 19). Si l'on conçoit une infinité de

plans M m P, C D a, perpendiculaires à la baſe de l'onglet, ces plans formeront des triangles rectangles ſemblables, puiſque leurs angles ſitués ſur le diamètre b B perpendiculaire à A a, ſeront égaux. Par la nature du cercle, en faiſant P $m = y$, b B $= 2a$, l'on a $y^2 = 2ax - xx$. Si l'on fait la hauteur du ſolide D $a = b$, les triangles ſemblables C a D, M m P donneront C $a = a$: a D $= b$: : P $m = y$: M $m = \frac{by}{a}$. Multipliant M m par $\frac{y}{2}$, l'on a le triangle M m P $= \frac{byy}{2a}$; ſi l'on multiplie ce triangle par $dx =$ P p, l'on aura l'élément de l'onglet $= \frac{by^2}{2a} . dx = \frac{b}{2a} (2axdx - xxdx)$, dont l'intégrale eſt $= \frac{b}{2a} (ax^2 - \frac{x^3}{3}) = \frac{b}{2a} \times \frac{(3ax^2 - x^3)}{3}$ & lorſque b P $= x$ eſt $= 2a$, l'on a la ſolidité de l'onglet $= \frac{2}{3} aab = aa . \frac{2}{3} b$, c'eſt-à-dire, que la ſolidité d'un tel onglet eſt égale à un priſme dont la baſe ſeroit égale au quarré du rayon de la baſe du cylindre & dont la hauteur ſeroit les $\frac{2}{3}$ de celle de l'onglet.

Pour avoir la ſurface, je remarque qu'en multipliant l'arc élémentaire n m par m M, l'on aura l'élément de la ſurface cherchée. En comptant les abſciſſes du centre l'élément de l'arc circulaire eſt (31.) $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{adx}{y}$. Mais mM eſt =

$\frac{by}{a}$ comme on vient de le voir. Donc l'élément de la ſurface eſt $= b\,dx$ & la ſurface cherchée $= bx$. Si $x = a$, la demi-ſurface convexe de l'onglet ſera $= ba$, & par conſéquent la ſurface entiere ſera $= 2ab$, ou égale au rectangle du diamètre de la baſe du cylindre & de la hauteur de l'onglet.

54. PROBLÊME. *Soit* A D (Fig. 9) *un quart d'ellipſe on demande le rapport des ſolides produits par la révolution de l'aire* A D C *autour du demi-grand-axe* A C $= a$ *& du demi-petit axe* D C $= b$. Soit C P $=$ M $p = x$, P M $=$ C $p = y$, l'on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx) = bb - \frac{bb}{aa}xx$, $x^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$; donc le ſolide produit par la révolution de l'aire elliptique C P M D autour de A C ſera $= \frac{c}{2r} \times S.\, y^2\,dx = \frac{c}{2r} S.\left(bb\,dx - \frac{bb}{aa}x^2\,dx\right) = \frac{c}{2r}\cdot\left(bbx - \frac{bbx^3}{3aa}\right)$. Si l'on fait $x = a$, le ſolide décrit par le quart d'ellipſe A C D ſera $= \frac{c}{2r}\cdot\frac{2}{3}b^2a$. Le ſolide produit par la révolution du ſegment C p M A, autour de DC, ſera $= \frac{c}{2r} S.\, x^2\,dy$ (parce que ici l'ordonnée p M $= x$, le cercle décrit par cette ordonnée eſt $= \frac{c}{2r}x^2$ & la différentielle de C p $=$ P M $= y$ eſt $= dy$; De ſorte qu'il faut changer y en x, &

réciproquement) $= \frac{c}{2r}$ S. $(aady - \frac{aa}{bb} y^2 dy) = \frac{c}{2r}\left(aay - \frac{aay^3}{3bb}\right)$. Si l'on fait $y = b$, le solide engendré par le quart d'ellipse sera $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2}{3} a^2 b$. Donc le premier solide est au second comme $b : a$. Si $a = b$, le quart d'ellipse deviendra un quart de cercle, & le solide engendré sera un hémisphère $= \frac{c}{2r} \cdot \frac{2a^3}{3}$.

55. PROBLEME. *Trouver la surface décrite par le quart d'ellipse* A D *autour du demi-axe* A C. Selon ce qu'on a dit ci-dessus (38), la différentielle d'un arc elliptique est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{bbx^2 dx^2}{aa.(aa-xx)}\right)}$

$= dx\sqrt{\left(1 + \frac{bbx^2}{aa.(aa-xx)}\right)} = \frac{dx\sqrt{\left(aa - xx + \frac{bbxx}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$

$= \frac{dx.\sqrt{\left(aa - xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$; donc

$y.\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ est $= ydx.\frac{\sqrt{\left(aa - xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$

$= \frac{b}{a} dx.\sqrt{\left(aa - xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}$, en substituant la valeur de $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$; donc $\frac{c}{r}$. S. $y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{cb}{ra}$. S. $dx\sqrt{\left(aa - xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}$. Je prolonge C A en G jusqu'à ce que $AG = \frac{aa}{\sqrt{(aa-bb)}}$ & je

prends $Cb = b$; je décris enſuite avec les demi-axes CG, Cb, l'ellipſe Gb. Maintenant faiſant $CP = x$, l'ordonnée $Pu = z$, l'on aura $z^2 = \frac{bb}{(GC)^2}(GC^2 - x^2)$; or $(CG)^2 = \frac{a^4}{aa-bb}$; donc $z^2 = bb - x^2.\frac{(aa-bb).bb}{a^4}$ $= \frac{bb}{aa}.\left(aa - xx\frac{(aa-bb)}{aa}\right)$; donc multipliant $Pu = z$ par dx, l'on aura l'élément de l'eſpace $CbPu$, & cet eſpace ſera $= \frac{b}{a}.S.dx\sqrt{\left(aa - xx.\frac{(aa-bb)}{aa}\right)}$; donc en menant l'ordonnée An, $\frac{c}{r}.y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{c}{r}.S.yds$, ſera $= AnBC$; c'eſt-à-dire, que la ſurface engendrée par la révolution de AD autour de CA eſt égale au produit de $\frac{c}{r}$ par la ſurface $An\,bC$.

56. PROBLEME. *Trouver le ſolide engendré par la révolution de l'aire* ABMP *pendant la révolution de la tractrice autour de ſon aſſymptote* (Fig. 6). Soit l'abſciſſe $AP = x$, $PM = y$, l'on aura (13) $dx = -\frac{dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$; donc $\frac{cy^2dx}{2r} = -\frac{cydy\sqrt{(aa-yy)}}{2r}$, dont l'intégrale eſt $= -\frac{c}{6r}.(aa-yy)^{\frac{3}{2}}$. Comme le ſigne $-$ ne change point la valeur du ſolide que nous cherchons, ce ſolide ſera $= \frac{c}{6r}.(aa-yy)^{\frac{3}{2}}$. Si l'on ſuppoſe $y = o$, le ſolide produit par l'aire infiniment longue de la tractrice ſera $= \frac{ca^3}{6r}$. Mais l'hémiſphère produit par la révolution du quart de cercle ADB autour du rayon $DB = a$, eſt, comme il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus (54), $= \frac{c}{2r}.\frac{2}{3}.a^3 = \frac{ca^3}{3}$; donc cet hémiſphère eſt au ſolide qu'on vient de trouver, comme $\frac{1}{3}; \frac{1}{6} :: 6 : 3 :: 2 : 1$.

57. PROBLEME. *Trouver la ſurface décrite par l'arc* AM *de la tractrice lorſqu'elle fait ſa révolution autour de ſon aſ-*

ſymptote BP. Les triangles ſemblables PMT, MRm donnent PM : MT :: MR = $-dy$: Mm = ds, ou $y : a :: -dy : ds$, ou $-ady = yds$ & $\frac{c}{r} y \cdot ds = \frac{c}{r} y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -\frac{c}{r} \cdot ady$, dont l'intégrale eſt = $-\frac{c}{r} ay +$ C. Pour déterminer la conſtante, je remarque que la ſurface cherchée doit être = o, lorſque $y = a$; donc C $- \frac{c}{r} aa =$ o, ou C $= + \frac{c}{r} aa$ & l'intégrale complette eſt = $\frac{ca}{r} \cdot (a - y)$. Si l'on fait $y =$ o, cette intégrale eſt = $\frac{caa}{r} = \frac{ca}{r} \cdot a$; c'eſt-à-dire, que la ſurface infiniment longue engendrée par la révolution de la tractrice autour de ſon aſſymptote, eſt égale au produit de la circonférence d'un cercle dont le rayon ſeroit = a, multipliée par le même rayon, ou à la ſurface convexe d'un cylindre dont le rayon de la baſe & ſa hauteur ſeroient égaux à la tangente de la tractrice.

58. PROBLEME. *On demande la ſurface engendrée par l'arc cicloïdal* Dn *pendant la révolution de la cicloïde autour de la tangente* DF (Fig. 7). Le diamètre du cercle générateur étant ſuppoſé = $2a$, l'abſciſſe DP = x, la corde DM, moyenne proportionnelle entre le diamètre & l'abſciſſe, ſera = $\sqrt{(2a \cdot x)}$; donc l'arc Dn qui eſt double de cette corde (32) ſera = $2\sqrt{(2a \cdot x)}$; donc l'élément ni eſt = $\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = ds$. Si l'on fait tourner cet élément autour de DF, il eſt évident que l'on aura l'élément de la ſurface = $\frac{c}{r} \cdot ln \cdot \frac{\sqrt{(2a)}dx}{\sqrt{x}} = \frac{c}{r} \cdot \sqrt{x} \cdot dx \times \sqrt{2a}$ (à cauſe de ln = DP = x). Donc en intégrant, la ſurface cherchée ſera = $\frac{c}{r}\sqrt{2a} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3r} \cdot cx \cdot \sqrt{(2a \cdot x)}$. Si x devient = $2a$,

la surface décrite par la moitié D A de la cicloïde sera $= \frac{8c}{3r} . aa.$

59. PROBLEME. *Que la courbe* A M B (Fig. 20.), *dont on a parlé dans la Premiere Partie de cet Ouvrage*, (Courbes algébriques 119.) *fait une révolution autour de la ligne* A B, *on demande la valeur du solide de révolution.*

L'équation de la courbe est $y^2 = \frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a - x} =$ $-x^2 - aa + \frac{2a^3}{2a-x}$ (en divisant, autant qu'on le peut, par $-x + 2a$), dans laquelle A B $= a$, A P $= x$; donc $y^2 dx = -x^2 dx - aadx + \frac{2a^3 dx}{2a-x}$, dont l'intégrale en ajoûtant une constante est $= C - \frac{x^3}{3} - aax$ $- 2a^3 L.(2a - x)$. Supposons d'abord que cette intégrale devient $= o$, lorsque $x = o$; dans ce cas l'on trouve $C = 2a^3 L. 2a$; donc l'intégrale complette ou le solide cherché engendré par l'aire A M P est $=$ $\frac{c}{2r} S. y^2 dx = \frac{c}{2r} . \left(2a^3 L.2a - \frac{x^3}{3} - a^2x - aa^3 L.(2a - x)\right)$ & faisant $x = a$, le solide engendré par l'aire A M B sera $= \frac{c}{r}\left(a^3 (L.2a - L.a) - \frac{2}{3} a^3.\right)$. Si l'on prend les logarithmes dans une logarithmique dont la soustangente soit $= a$, selon ce qu'on a dit dans la premiere Section, il faudra diviser par a les logarithmes L. $2a$, L. a; donc alors le solide sera $= \frac{c}{r}\left(a^2 (L.2a - L.a) - \frac{2}{3} a^3\right)$. Et ainsi ce produit ne sera que de trois dimensions. Supposons ensuite que S. $y^2 dx$ est $= o$, lorsque $x = a$, dans ce cas on aura $C = \frac{4}{3} a^3 + 2a^2 L. a$, en prenant les logarithmes, comme on vient de le dire; donc S. $y^2 dx =$ $\frac{4}{3} . a^3 + 2a^2 L. a - \frac{x^3}{3} - a^2 x - 2a^2 L. (2a - x)$, qui étant multipliée par $\frac{c}{2r}$, donnera le solide engendré

par l'aire B m p. Si l'on fait $x = 2a$, on aura le ſolide engendré par l'aire infiniment longue B R F D $= \frac{c}{r}.(a^2 L.a - a^2 L.o - \frac{1}{3}.a^3)$, ce ſolide ſera infini, parce que le logarithme d'une ordonnée ma (Fig. 5), infiniment petite, eſt infini.

60. PROBLEME. *Trouver l'élément de la ſurface d'un cône oblique* A f B (Fig. 21). Suppoſons que ce cône ſoit coupé par le plan A f B, qui paſſe par un des diamètres de la baſe ſur laquelle, prolongée s'il le faut, tombe la perpendiculaire f F. Prenons un arc infiniment petit mn (élément de l'arc D m), dont la tangente ſoit T M; & ſuppoſant C P $= x$, C A $=$ C D $= a$ & que l'on a tiré les autres lignes que repréſente la figure, de maniere que F M ſoit perpendiculaire à T M, il eſt viſible que $\frac{mn.fM}{2}$ repréſente l'élément fnm de la ſurface cherchée; car le plan M f F paſſant par la ligne fF perpendiculaire au plan de la baſe ſera perpendiculaire au même plan de la baſe; mais la tangente T M eſt perpendiculaire, par conſtruction, à M F, commune ſection du plan de la baſe & du plan f M F & de plus T M ſe trouve dans le plan de la baſe; donc cette ligne eſt perpendiculaire au plan f M F & par conſéquent à la ligne f M hauteur du triangle nfm. Soit maintenant C F $= b$, l'angle C n T étant droit, & n P étant une perpendiculaire abaiſſée du ſommet de cet angle, ſur l'hypothénuſe C T, l'on a C P : C n :: C n : C T, ou $x : a :: a :$ C T $= \frac{aa}{x}$. Mais C T : C n :: T F : M F, ou $\frac{aa}{x} : a :: \frac{aa}{x} + b :$ M F $= \frac{aa + bx}{a}$. Soit $fF = g$, l'on aura $fM = \sqrt{\left(gg + \frac{(aa+bx)^2}{aa}\right)}$; & parce que l'élément de l'arc circulaire D m eſt, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (31.), $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, l'élément

fnm ſera $= \frac{adx\sqrt{\left(gg+\frac{(aa+bx)^2}{aa}\right)}}{2.\sqrt{(aa-xx)}} =$

$\frac{\sqrt{\left(\frac{gg.aa+a^4}{b^2}+\frac{2aax}{b}+xx\right)}}{2.\sqrt{(aa-xx)}}$ Toutes les formules qui pourront être ramenées à celle que l'on vient de trouver, dépendront de la ſurface du cône oblique.

61. PROBLÊME. *Trouver le ſolide produit par la révolution de la courbe* A D (Fig. 3) *autour de la ligne* S V, *diſtante de l'axe* D C *de la quantité* p. Il eſt viſible qu'en faiſant M N $= y$, l'on aura b M $= p + y$, & qu'en ſubſtituant $p + y$, au lieu de y dans la formule $\frac{c}{2r} y^2 dx$, l'on aura le ſolide engendré par l'aire S D A V $= \frac{c}{2r}$. S. $(y+p)^2 . dx$. Mais le ſolide engendré par le rectangle D C V S eſt $= \frac{c}{2r}$. S. $p^2 dx$, qui étant retranché du ſolide qu'on vient de trouver, donnera $\frac{c}{2r}$ S. $(y+p)^2 dx - \frac{c}{2r} \times$ S. $p^2 dx = \frac{c}{2r}$. S. $(y^2 dx + 2pydx)$ (A) pour le ſolide engendré par la ſurface C D A autour de SV.

Soit l'hyperbole équilatere A G (Fig. 11), on demande le ſolide engendré par le triligne b A g autour de l'axe C B. En faiſant $bg = Ap = x$, P $g = y$, l'on auroit $y^2 = 2px + xx$ en ſuppoſant le demi-axe C A $= p$. Si l'on change y en x, en faiſant $pg =$ CD $= x$ & $bg = y$, l'on

l'on aura $x^2 = 2py + yy$ & $\frac{c}{2r}$ S. $(y^2 dx + 2pydx)$ $= \frac{c}{2r}$. S. $x^2\, dx = \frac{c}{2r} \cdot \frac{x^3}{3}$. Ainſi ce ſolide eſt égal à un cône dont la hauteur eſt x & dont le rayon de la baſe eſt auſſi $= x$, car alors la baſe eſt $= \frac{cx^2}{2r}$. L'on peut remarquer qu'ici gm eſt $= dx$, & que le produit de la ſurface que décrit nG pendant la révolution par dx, eſt l'élément du ſolide cherché.

62. REMARQUE I. Si l'on vouloit avoir le ſolide engendré par l'aire A B m M (Fig. 13.), compriſe entre deux courbes ou les deux branches d'une même courbe, on chercheroit ſéparément le ſolide engendré par l'aire A B m P & le ſolide engendré par l'aire A M P, l'on retrancheroit le ſecond du premier & le problême ſeroit réſolu. Si l'on demandoit le ſolide engendré par la courbe B m D autour d'une ligne fL, parallele à l'axe A P, l'on chercheroit la valeur générale d'une ordonnée D L, on chercheroit enſuite la valeur du ſolide engendré par l'aire D m L, en ajoutant une conſtante qu'on détermineroit par cette condition que l'intégrale s'évanouiroit lorſqu on auroit A P $= fm = g$, par exemple. On chercheroit enſuite la valeur du ſolide produit par l'aire $f m$ B, la ſomme des deux ſolides donneroit le ſolide cherché; ôtant l'un de l'autre l'on aura leur différence.

REMARQUE II. Si l'on vouloit la ſurface décrite par l'arc A g (Fig. 11), autour de la ligne T h, diſtante de CD, que nous pouvons regarder comme l'axe de la courbe, de la quantité T C $= p$; en faiſant D $q = y$, l'on auroit $hg = p + y$, & l'on ſubſtitueroit $p + y$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{r}\, y\, V(dx^2 + dy^2)$; de ſorte que la ſur-

face cherchée seroit $= \frac{c}{r} \cdot S. (p + y) \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

REMARQUE III. Si les co-ordonnées DM, AD (Fig. 22) étoient obliques, il y auroit quelque changement dans les formules. Soit l'angle des coordonnées $= z$, $AD = x$, $DM = y$, $DF = p$ & supposons que la courbe tourne autour de l'axe BF parallèle à l'axe AD, on demande la surface qu'engendrera la courbe & le solide que produira l'aire ADM. Ayant tiré ML perpendiculairement à AD, le triangle rectangle MPD, en faisant le sinus total $= r$, donne r : sinus z :: y : $PM = \frac{y \sin. z}{r}$. L'on a aussi $fD = LP = \frac{p \sin. z}{r}$; donc $LM = \frac{(p+y) \sin. z}{r}$; on a encore $PD = \frac{\cos. z \cdot y}{r}$ & $AP = x - \frac{\cos. z \cdot y}{r}$. Si dans la formule $\frac{c}{2r} S.(y+p)^2 dx$ (61) on met $\frac{(p+y). \sin. z}{r}$ au lieu de $y + p$ & la différentielle de $x - \frac{\cos. z \cdot y}{r}$ au lieu de dx, la formule A (de l'endroit cité) donnera le solide engendré par l'espace AMP autour de $BF = \frac{c}{2r} \cdot \frac{(\sin. z)^2}{r^2} \cdot S. (y^2 + 2py) . (dx - \frac{\cos. z \, dy}{r})$, auquel il faut ajouter le solide engendré par le triangle PMD; c'est-à-dire $\frac{c}{2r} \cdot \frac{(\sin. z)^2}{r^2} S. \frac{\cos. z \cdot dy}{r} \cdot (y^2 + 2py)$, ainsi que nous le verrons bien-tôt & le solide cherché sera $= \frac{c. \sin z^2}{2r^3} \cdot S. (y^2 + 2py) \, dx$

Si l'on ſuppoſe $p = 0$, on aura le ſolide engendré autour de l'axe A P.

Si l'on veut avoir la ſurface décrite par la courbe A M, on ſubſtituera $\frac{\text{ſin. } z}{r} \cdot (y + p)$ au lieu de y dans la formule $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} y\,ds$, & l'on aura la ſurface cherchée $= \frac{c \text{ ſin } z}{rr} \cdot S.\,(y + p)\,ds$. Mais ici ds n'eſt pas $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; mais $ds = \sqrt{(dx^2 - 2\frac{\text{cof. } z}{r} dy\,dx + dx^2)}$. Si l'angle z étoit obtus, ſon co-ſinus ſeroit négatif, & l'on changeroit le ſigne du ſecond terme de la quantité ſous le ſigne, & il eſt facile de voir quel changement il faudroit faire dans la formule du ſolide engendré par l'aire AMP. Dans le même cas le ſolide décrit par le triangle D M P ſeroit négatif; c'eſt-à-dire, qu'on le retrancheroit au lieu de l'ajouter.

Si dans la formule A (61), au lieu de y l'on ſubſtitue la valeur de $PM = \frac{\text{ſin. } z}{r} y$; au lieu de p, la valeur de $PL = \frac{\text{ſin. } z}{r} p$; au lieu de dx, la différentielle de $\frac{\text{cof. } z}{r} y$ (parce que $PD = \frac{\text{cof. } z \cdot y}{r}$, & que $Pp = rm$ peut être regardé comme la différentielle de PD), & qu'on regarde z comme conſtant, l'on aura le ſolide engendré par le triangle $MPD = \frac{c}{2r} \times \frac{(\text{ſin. } z)^2}{r^2} \cdot S.\,\frac{\text{cof. } z}{r} dy \cdot (y^2 + 2py)$.

Si la courbe eſt rapportée à un foyer F (Fig. 23), pour trouver le ſolide produit par la révolution de l'aire ARF autour de la ligne GT, parallèle à AF, je cherche le ſolide élémentaire produit par le triangle infiniment petit DRF. Que la révolution ſe faſſe par un arc infiniment petit, le point D décrira l'arc infiniment petit DP & le point F l'arc F *b*. Dans ce mouvement le triangle élémentaire DFR décrira un ſolide, qui aura pour faces deux triangles & trois quadrilatères. Ce ſolide peut être repréſenté par la Figure 24.

Si par le point *b* on mene un plan qui paſſe par DR, ce ſolide ſera diviſé en deux pyramides, l'une triangulaire *b* DRF, l'autre quadrilatère *b* DR *p* P. La ſolidité de la premiere eſt égale au produit du triangle FDR, par le $\frac{1}{3}$ de *b* F. La ſeconde eſt égale au double d'une pyramide qui auroit FDR pour baſe & DP pour hauteur; ce que l'on comprendra aiſément, en concevant le plan *b* PR qui la diviſe en deux pyramides qui ont même ſommet *b*, & dont les baſes ſont chacune la moitié du rectangle P*p* DR; mais d'ailleurs la pyramide *b* P *p* R a auſſi *p* R = P D pour hauteur & le triangle *b* P *p* = FDR pour baſe. Donc la ſeconde pyramide eſt les $\frac{2}{3}$ du produit de FDR par DP; donc le ſolide élémentaire eſt = $FDR \cdot \frac{F\,b + 2 \cdot DP}{3}$; donc lorſque la révolution ſera entiere, le ſolide élémentaire ſera égal au produit de $\frac{FDR}{3}$ par la circonférence décrite par F, plus le double de la circonférence décrite par le point D.

Soit FD = *y*, l'arc *g h* (décrit avec le rayon F*g* = *a*) = *z*; donc *h* L = *dz*. Si l'on fait l'arc D*m* (décrit du centre F avec le rayon *y*)

$= dx$, l'on aura $a : dz :: y : dx = \frac{y\,dz}{a}$. Multipliant cet arc par $\frac{1}{2}\,y$, l'aire FDm, ou FDR, ſera $= \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2\,dz}{a}$. De plus le triangle rectangle FBD donne $a : \text{ſin.}\,z :: y : \text{BD} = \frac{\text{ſin.}\,z\,.\,y}{a}$. Si l'on fait BG $= p$, la circonférence décrite par TF ſera $= \frac{cp}{r}$, & la circonférence décrite par le point D autour de GT ſera $= \frac{c}{r}\cdot\left(p + \frac{\text{ſin.}\,z}{a}\cdot y\right)$, & parce que l'aire FDR eſt $= \frac{1}{2}\,y\,dx$, l'élément produit par cette aire dans une révolution entiere ſera $= \frac{1}{2}\,y\,dx \times \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{cp}{r} + \frac{2cp}{r} + \frac{2c\,\text{ſin.}\,z\,.\,y}{ra}\right) = \frac{1}{2}\,y\,dx \times \left(\frac{ep}{r} + \frac{2c\,\text{ſin.}\,z\,.\,y}{3r\,.\,a}\right)$. Si on ſubſtitue $\frac{y\,dz}{a}$, au lieu de dx, le ſolide de révolution ſera, en ſuppoſant $a = r$, ſera, dis-je, $\frac{c}{3r}\cdot\text{S.}\left(\frac{3p}{2r}y^2dz + \frac{y^3\,\text{ſin.}\,z\,.\,dz}{r^2}\right)$ Si l'aire AFD tourne autour de la ligne AF, l'on aura $p = 0$, & le ſolide de révolution ſera $= \frac{c}{3r}\cdot\text{S.}\,y^3\,\frac{\text{ſin.}\,z\,.\,dz}{r^2}$.

Soit Ai (Fig. 3) $= z$ un arc de cercle dont le rayon ſoit $= r$, les triangles CiH, irl ayant leurs côtés perpendiculaires ſont ſemblables ; donc Ci : iH :: $ir = dz$: $il = \text{H}h$. Or, Hh eſt la différentielle du co-ſinus de l'arc z & iH eſt le ſinus de z ; donc r : ſinus $z :: dz : -d$. co-ſinus $= \frac{\text{ſin.}\,z\,.\,dz}{r}$. On met le ſigne $-$, parce que le ſinus augmentant, le co-ſinus dimi-

nue. Substituant la valeur de $\frac{\text{sin. } z \cdot dz}{r}$ dans la derniere formule, elle deviendra $= \frac{c}{3r} \times$ S. $- y^3 \frac{d \cdot \text{cos. } z}{r}$.

63. PROBLÈME. *Supposant que* AD (Fig. 23) *est un arc de cercle dont le rayon* FA *soit* $= r$, *on demande le solide engendré par le secteur* ADF *autour du rayon* AF. Dans ce cas on a FD $= y = r$ & la formule $\frac{c}{3r} \cdot$ S. $- y^3 \frac{\text{cos. } z}{r}$ est $=$ $\frac{c}{3r} \cdot$ S. $- r^3 \frac{d \cdot \text{cos. } z}{r} = \frac{cr}{3} \cdot$ S. $-$ d. cos. z $= \frac{-cr}{3} \cdot$ co-sinus $z +$ C. Pour déterminer la constante C, je remarque qu'en supposant le co-sinus de $z =$ au rayon, l'arc AD sera $= 0$, aussi bien que le solide de révolution; donc $- \frac{crr}{3} + C = 0$, ou $C = + \frac{cr^2}{3}$; donc le solide cherché est $= \frac{c}{3r} \cdot \times (r^3 - r^3$ co-sinus $z)$.

DU CENTRE DE GRANDEUR, OU DU CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES.

64. Si les centres de deux corps sphériques *a* & *b* (Fig. 25) sont attachés aux extrémités d'une ligne *ab* (qu'on peut considérer sans pesanteur & comme inflexible), ces corps seront en équilibre, pourvu que la ligne ou le *levier ab* soit soutenu par un point *f* tel que l'on ait $a : b :: bf : af$, ou pourvu que les distances de ces corps au point d'appui soient en raison inverse de ces corps; nous considérons ici les corps, comme si toute leur matiere étoit réu-

rie au centre de ces corps. La démonſtration de ce principe, regardé chez les Méchaniciens comme une vérité inconteſtable, ſe trouve dans les Livres les plus élémentaires de Méchanique. Si le corps a péſe une livre, & le corps b deux livres, la diſtance af ſera double de la diſtance fb.

65. PROBLÊME. *Diviſer une ligne* $ab = c$ *en raiſon de deux quantités* a *&* b. J'appelle x la partie de la ligne qui répond à la quantité a, $c - x$ ſera la diſtance fb qui répond à b. Par la nature du Problême l'on a $a : b :: c - x : x$; donc $ax = bc - bx$, ou $ax + bx = bc$, ou $x = \frac{b.c}{a+b}$. Donc on trouvera x en faiſant $a + b : b :: c : x$; c'eſt-dire, que la diſtance ou la partie de la ligne qui répond au poids a, ſe trouve en prenant le quatrieme terme d'une proportion dont le premier terme eſt la ſomme des poids, le ſecond eſt le poids b, & le troiſieme la ligne donnée c. L'on aura $c - x = c - \frac{b.c}{a+b} = \frac{ca+cb-bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$; donc $a + b : a :: c : c - x$; c'eſt-à-dire, que l'on trouvera la diſtance de chaque poids au point d'appui, en diſant, la ſomme des poids eſt à un de ces poids, comme la longueur du levier eſt à la diſtance de l'autre poids au point d'appui. Si on ſuppoſe a de trois livres, b de douze livres, & la ligne ab de ſix pieds, la premiere proportion donnera $12 + 3 = 15 : 12 :: 6 \text{ Pieds} : x = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} = 4 \text{ Pieds} + \frac{4}{5}$ de pied.

La *maſſe* d'un corps eſt la quantité de matiere qu'il contient. L'on appelle *centre de maſſe*, *centre*

de grandeur, centre de gravité, un point par lequel ce corps étant ſuſpendu, il demeure en repos, de quelle maniere que ſes autres parties ſoient ſituées. Toute ligne horiſontale qui paſſe par le centre de gravité du corps ſera appellée *axe d'équilibre*.

Un corps m (Fig. 26) ſuſpendu à l'extrémité a d'un levier, agit avec d'autant plus de force que la diſtance de la direction $a\,m$ (de ce corps vers le centre de la terre), au point d'appui f eſt plus grande, & l'on appelle *moment du corps* le produit de la maſſe de ce corps par la diſtance $a\,f$ de ſa direction $a\,m$ (vers la terre.)

Les diſtances auxquelles les corps terreſtres peuvent agir les uns ſur les autres par le moyen des machines ſont aſſez petites pour que l'on conſidere les directions de ces corps vers la terre comme parallèles ; & la peſanteur des corps ſur les plus hautes montagnes & les vallons les plus profonds, étant ſenſiblement la même, on peut dans la méchanique conſidérer la peſanteur comme uniforme, lorſqu'il s'agit des corps ſitués ſur la ſurface ou auprès de la ſurface de la terre.

66. THÉORÊME. *Si pluſieurs corps* m, p, R, n *ſont attachés à une ligne* $a\,b$, *ſuppoſée inflexible & ſans peſanteur, & que cette ligne ſoit ſoutenue ou ſuſpendue par un point* f, *de maniere que la ſomme des produits des maſſes, chacune multipliée par la diſtance de ſon point de ſuſpenſion au point* f *d'un côté, ſoit égale à la ſomme de pareils produits de l'autre côté, ces corps ſeront en équilibre. Sçavoir,* $ſi\ m\,.\,af + p\,.\,cf = n\,.\,bf + R\,.\,gf$.

La force du corps m, pour faire tourner la ligne $a\,b$ autour du point f eſt d'autant plus grande que la diſtance $a\,f$ eſt plus grande, de maniere que

ſi cette diſtance devenoit double ou triple, cette force deviendroit auſſi double ou triple, ainſi qu'il eſt aiſé de s'en convaincre par l'expérience. Cette force eſt auſſi d'autant plus grande que la maſſe du corps m, qui eſt toujours comme le poids de ce corps, eſt plus grande. Donc la force de ce corps par rapport au point f, eſt toujours comme le produit $m \cdot af$; de même la force du corps p eſt toujours comme le produit cf par la maſſe p & ainſi des autres; donc $m \cdot af + p \cdot cf$ exprime la force qui tend à faire tourner la ligne ab d'un côté, & $R \cdot gf + n \cdot bf$, celle qui tend à faire tourner la même ligne du côté oppoſé; donc ſi ces forces ſont égales, il y aura équilibre.

Le point f eſt le *centre commun de gravité des corps* m, p, R, n.

67. Soit maintenant deux maſſes quelconques a & b (Fig. 25) ramaſſées en a & b; & ſuppoſons qu'on ait diviſé (65) ab en f en raiſon inverſe des maſſes a & b. Soit imaginé un plan repréſenté par la ligne MN, ſur lequel on ait tiré des perpendiculaires des points a, f & b. Je dis que l'on aura l'équation $a \cdot aM + b \cdot Nb = (a + b) \cdot fP$. Ayant tiré la ligne hfL parallèle au plan MN & qui rencontre les lignes Ma, Nb, prolongées s'il le faut, les triangles ſemblables bfL, afh, donneront $bf : af :: bL : ah$. Mais par la ſuppoſition $bf : af :: a : b$; donc $a : b :: bL : ah$; donc $a \cdot ha = b \cdot Lb$. Mais $a \cdot ha$ eſt la différence du produit $a \cdot fP$, au produit $a \cdot aM$, & $b \cdot BL$ eſt la différence du produit $b \cdot bN$ au produit $b \cdot fP$; donc on a la proportion arithmétique $a \times Ma \cdot a \times fP : b \times fP \cdot b \times bN$; donc $a \times Ma + b \times bN = (a + b) \times fP$.

COROLLAIRE. Donc la ſomme des produits des quantités a & b, par leurs diſtances au plan MN, ſera égale au produit de la ſomme des quantités par la diſtance du point f au même plan ; c'eſt donc la même choſe que ſi ces quantités étoient ramaſſées au point f.

68. Ajoutons maintenant une troiſieme maſſe m. Qu'on joigne les points m & f par une ligne qu'on diviſera en F de maniere que $a + b : m :: m\,F : F\,f$; c'eſt-à-dire, qu'on diviſera (65) la ligne $f\,m$ en raiſon inverſe de $a + b$ & de m, & ſuppoſant tirées les lignes $m\,n$, F R perpendiculaires au plan M N, je dis que l'on aura $a \times a\,M + b\,.\,b\,N + m\,.\,n\,m = (a + b + m)\,.\,F\,R$. Si l'on conçoit les maſſes a & b comme ramaſſées en f, ou comme une ſeule maſſe ſituée en f, ſelon ce qu'on vient de dire (67), l'on a $(a + b) \times f\,P + m\,.\,n\,m = (a + b + m)\,.\,F\,R$. (Ici $a + b$ eſt regardé comme une ſeule maſſe) ; mais l'on a (67) $(a + b)\,.\,f\,P = a\,.\,a\,M + b\,.\,b\,N$; donc $a\,.\,a\,M + b\,.\,b\,N + m\,.\,n\,m = (a + b + m) \times F\,R$. C'eſt pourquoi que les trois corps a, b, m ſoient placés en a, b, m, ou qu'ils ſoient aſſemblés en F, la ſomme des produits de ces corps par leurs diſtances au plan MN, ſera toujours la même.

En ſuivant la même méthode, on prouvera que ſi l'on ajoute un quatrieme corps D, & qu'on tire la ligne D F, & qu'on la diviſe de maniere que l'on ait $a + b + m : D :: D\,G : F\,G$, la ſomme des rectangles, ou, ce qui revient au même, la ſomme des produits des quatre corps par leur diſtance au plan, eſt égale à un ſeul produit fait de la ſomme de ces corps, par la diſtance G S du point G au plan ; & parce qu'on peut prouver

la même chose pour un nombre quelconque de corps, il eſt évident que quelque nombre de corps que l'on ait, l'on peut toujours trouver un point tel que le produit de la ſomme de tous les corps par la diſtance de ce point à un plan quelconque, ſoit égal à la ſomme des produits particuliers de chacun de ces corps par la diſtance de chacun au même plan. Ce point eſt appellé le *centre de maſſe*, le *centre de grandeur*, le *centre de gravité*. Si quelques-uns de ces corps étoient ſitués de l'autre côté du plan, leurs diſtances devroient être regardées comme négatives, & les produits de ces corps par leurs diſtances ſeroient pris avec le ſigne —. Si le plan paſſe par le centre de grandeur, la diſtance de ce point au plan étant $= 0$, la quantité qui repréſente la ſomme du produit de ces corps ſitués d'un côté, doit être égale à celle qui repréſente la ſomme négative des produits de ces corps ſitués de l'autre côté.

L'équation $a \,.\, aM + b \,.\, bN + m \,.\, nm = (a + b + m) \,.\, FR$, donne $FR = \frac{a \,.\, aM + b \,.\, bN + m \,.\, nm}{a + b + m}$. C'eſt-à-dire, la diſtance du centre de gravité F de trois corps à un plan eſt égale à la ſomme des rectangles de chacun de ces corps par ſa diſtance au même plan, diviſée par la ſomme de ces corps. Et en général quelque ſoit le nombre des corps, la diſtance de leur centre de gravité à un plan, eſt égale au quotient de la ſomme des produits, ou rectangles de chacun des corps par leurs diſtances particulieres, en diviſant par la ſomme des corps : on prendra avec le ſigne — les produits dans leſquels les diſtances ſeront négatives. On peut dire auſſi que la

distance du centre de gravité d'un système de corps par rapport à un plan, est égale au quotient de la somme des *momens* de ces corps par rapport au plan donné *, divisée par la somme de ces corps.

Mais on peut demander, si pour un assemblage ou système de corps quelconque, ce point qu'on appelle centre de gravité, est déterminé & unique. Je dis qu'il est unique; en effet, si l'on conçoit trois plans perpendiculaires l'un à l'autre, on trouvera la distance du centre de gravité, par rapport à chacun de ces plans, en divisant la somme des rectangles de chacun des corps par leurs distances particulieres à chaque plan, en divisant, dis-je, cette somme par la somme des corps. Si l'on suppose maintenant que l'on mene trois autres plans parallèles aux premiers & à la distance trouvée, il est visible que le centre de gravité se trouvera dans ces trois plans. Donc il sera situé dans la section des trois derniers plans, section qui est évidemment un point; donc &c.

Lorsqu'il s'agit de lignes, on peut les concevoir comme l'assemblage d'une infinité de points pesans. L'on peut aussi considérer une surface comme l'assemblage d'une infinité de lignes pesantes. Si les centres des corps dont on cherche le centre de

* Le *moment* d'un corps par rapport à un plan, est le produit de ce corps par sa distance au plan. Si le corps commençoit à se mouvoir en faisant tourner le plan, sa vitesse respectivement à un autre corps situé sur la même ligne, seroit d'autant plus grande, que sa distance au plan seroit plus grande, & sa force en seroit aussi d'autant plus grande. De plus la force est d'autant plus grande que le corps est plus grand.

grandeur ſont ſitués dans un même plan, on tirera dans ce plan deux lignes perpendiculaires entre elles, & l'on cherchera la ſomme des momens de de ces corps par rapport à ces lignes. On diviſera ces ſommes par la ſomme des corps; les quotients indiqueront la diſtance du centre de grandeur par rapport à chacune de ces lignes; donc en tirant deux autres lignes parallèles aux premieres & à la diſtance trouvée, le centre de grandeur ſe trouvera dans ces deux lignes, & par conſéquent il ſera ſitué dans l'interſection de ces lignes.

La conſidération du centre de grandeur appartenant à la géométrie, il n'eſt pas ſurprenant que nous nous en occupions ici. Nous nous ſervirons cependant de la dénomination du centre de gravité à cauſe de l'uſage qu'on en pourra faire ailleurs.

69. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'un triangle a b c* (Fig. 27). Je tire par le ſommet de ce triangle la ligne $g b$ parallèle à la baſe $a c$. Je tire auſſi la ligne $b f = c$, perpendiculaire à la baſe & la ligne $b D = a$, qui partage la baſe en deux également, & ſuppoſant les lignes $m n$, $r s$ parallèles à la baſe, je fais $ac = b$, $b p = x$, $i p = dx$. A cauſe des parallèles ac, mn, il eſt viſible que les hauteurs des triangles $a b c$, $b m n$ ſont entre elles comme les baſes $a c$ & $m n$; donc $c : b :: x : mn = \frac{bx}{c}$; multipliant mn par dx, l'on aura l'élément $mnrs = \frac{bx}{c} \cdot dx$. Si l'on multiplie cet élément par ſa diſtance x à la ligne $b g$, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{bx^2 dx}{c}$, &

$\frac{bx^3}{3c}$ ſera la ſomme des momens des élémens du triangle bmn. Si l'on diviſe cette ſomme par celle des élémens, ou par S. $\frac{bxdx}{c} = \frac{bx^2}{2c}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ donnera la diſtance du centre de gravité du triangle bmn à la ligne gb. Si l'on fait $x = c$, le centre de gravité du triangle abc ſera éloigné de b de la diſtance $bp = \frac{2}{3} . c$. Maintenant la ligne bD diviſant la baſe ac en deux également, diviſera auſſi les lignes mn, rs en deux également; donc il eſt viſible que cette ligne diviſe les élémens du triangle en deux également; donc le centre de gravité de ces élémens ſe trouve ſur cette ligne; mais les triangles ſemblables bDf, bLp, donnent $bf = c : bp = \frac{2}{3}c :: bD = a : Lb = \frac{2}{3}a$. Donc ſi, du ſommet d'un angle quelconque d'un triangle, on mène une ligne qui coupe le côté oppoſé que j'appelle la baſe du triangle, en deux également, le centre de gravité du triangle ſe trouvera ſur cette ligne & ſera éloigné de la baſe, du $\frac{1}{3}$ de cette ligne.

REMARQUE I. Il eſt viſible que le centre de gravité ſe trouve ſur une ligne ou ſur un plan qui partage en deux également les élémens de la figure.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le centre de gravité d'un quadrilatère $abfc$ (Fig. 28), on chercheroit les centres de gravité m, L des triangles bfc, bac, l'on meneroit la ligne mL qu'on diviſeroit en P, en raiſon inverſe des aires de ces triangles, le point P ſeroit le centre de gravité cherché.

Si le quadrilatère étoit un parallélogramme, en tirant la ligne RT, par le centre de gravité des bases du parallélogramme, il est visible que cette ligne diviseroit en deux parties égales, les élémens du parallélogramme, & que le centre de gravité se trouveroit au milieu de cette ligne. Ce seroit la même chose, si la figure *a b c f* étoit un prisme ou un cylindre. L'on voit aussi facilement que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de cette droite.

70. PROBLÊME. *Trouver la distance du centre de gravité d'une demi-parabole* AFD *d'un genre quelconque, par rapport à la tangente.* AT *perpendiculaire à l'axe* AF (Fig. 29). L'équation $a^{m-1}x = y^m$ pouvant représenter toutes les paraboles, l'on a en faisant $a = 1$, $x = y^m$, $dx = m.y^{m-1}dy$. Multipliant y par dx, l'on a l'élément de la demi-parabole $= y\,dx$; & multipliant cet élément par sa distance x à la ligne TL, l'on a le moment de cet élément $= yx\,dx = y.y^m.m.y^{m-1}dy = my^{2m}dy$, dont l'intégrale $\frac{m}{1+2m}.y^{2m+1}$ divisée par la somme des élémens $S.y\,dx = S.my^{m-1}.y.dy = S.my^m dy = \frac{m}{m+1}y^{m+1}$ donne $\frac{1+m}{1+2m}.y^m = \frac{1+m}{1+2m}x$, pour la distance demandée. Si l'on fait AP $=$ AF $= a$, l'on aura la distance du centre de gravité de la demi-parabole à la tangente $AL = \frac{1+m}{1+2m}.a$. Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on a $\frac{3}{5}a$ pour la distance cherchée.

Si l'on veut avoir la distance du même centre de gravité, par rapport à l'axe AF, on considérera que l'élément $pPMi = y\,dx$ a son centre de gravité au milieu de $rs = y$; donc en multipliant $y\,dx$ par $\frac{1}{2}y$, l'on aura le moment de cet élément par rapport à l'axe $AF = \frac{1}{2}y^2\,dx = \frac{m}{2}y^{m+1}\,dy$; donc la somme des momens divisés par la somme S. $y\,dx$ des élémens sera égale à $\frac{m}{4+2m}y^{m+2}$ divisé par $\frac{m}{1+m}y^{m+1}$, ou sera égale à $\frac{1+m}{4+2m}\cdot y$. Si l'on fait $AP = \frac{1+m}{1+2m}a$, & la perpendiculaire $PC = \frac{1+m}{4+2m}\cdot FD$, le point C sera le centre de gravité cherché, il est visible que le centre de gravité de la demi-parabole ABF sera situé en g, en faisant $Pg = PC$; donc le centre de gravité de la parabole entiere BAD sera situé en P.

71. PROBLÊME. *Trouver la distance du centre de gravité du paraboloïde* BAD (*formé par la révolution d'une parabole quelconque autour de son axe*) *au sommet* A (Fig. 29). Si dans la formule $\frac{c}{2r}y^2\,dx$, l'on substitue la valeur de dx, prise de l'équation $x = y^m$, l'on aura l'élément du paraboloïde $= \frac{c}{2r}my^{m+1}\,dy$. En multipliant cet élément par $y^m = x$, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{m.c}{2r}y^{2m+1}\,dy$. Divisant

la

la ſomme $\frac{m}{2+2m} \cdot \frac{c}{2r} y^{2m+2}$ des momens par la ſomme des élémens $\frac{m}{m+2} \cdot \frac{c}{2r} \cdot y^{m+2}$, l'on aura la diſtance cherchée $= \frac{2+m}{2+2m} \cdot y^m = \frac{2+m}{2+2m} x$. Si l'on fait $x = AF = a$, cette diſtance ſera $= \frac{2+m}{2+2m} \cdot a$. Si $m = 2$, comme dans la parabole ordinaire, l'on aura la diſtance cherchée en prenant $AP = \frac{4}{6} a = \frac{2}{3} a$.

72. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'un ſolide engendré par une demi-parabole ordinaire* A D F *autour de la tangente* T L (Fig. 29). Il eſt viſible que le centre de gravité eſt ſitué ſur la tangente A L *. Soit ſuppoſée A F $= a$, & la circonférence décrite avec ce rayon égale à c, on aura la circonférence décrite avec le rayon $AP = x$, en faiſant $a : c :: x : \frac{c.x}{a}$. Si on multiplie cette circonférence par $PM =$, l'on aura la ſurface cylindrique décrite par MP pendant la révolution $= \frac{cx.y}{a}$. Si l'on multiplie cette quantité par $Pp = dx$, l'on aura l'élément cy-

* Lorſque le point dans lequel ſe trouve le centre de gravité n'eſt pas un point de la figure, on peut ſuppoſer que le corps ſoit ſuſpendu par ce point, en concevant que ce point eſt attaché au corps par des lignes inflexibles.

lindrique du solide de révolution $= \frac{c x y dx}{a}$. L'équation $p x = y^2$ de la parabole donnée $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc l'élément du solide est $= \frac{c}{a} \times p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} dx$. Si l'on multiplie cet élément par $\frac{1}{2} . y = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, par la distance de son centre de gravité au cercle décrit par AF, l'on a le moment de cet élément (par rapport à AF) $= \frac{c p x^2 dx}{2a}$. Si l'on divise la somme des momens $\frac{c p x^3}{6 a}$, par la somme des élémens $\frac{2 c p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5 a}$, l'on a $\frac{5}{12} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{12} y$. Si l'on fait F D $= b$ & $y = b$, & que l'on prenne A L $= \frac{5}{12} . b$, le point L sera le centre de gravité cherché.

73. PROBLÊME. *Supposant que la courbe* B A D (Fig. 29) *est une portion d'ellipse, on demande le centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe* A P. Il est visible que le centre de gravité est situé sur l'axe de la courbe. Si l'on fait le paramètre de la courbe $= p$, le grand axe $= a$, l'abscisse A P $= x$, l'ordonnée P M $= y$, selon ce qu'on a dit dans les Sections-Coniques, l'on a l'équation $y^2 = \frac{p}{a}(a x - x x)$. Si la courbe étoit une hyperbole, l'on auroit $y^2 = \frac{p}{a}(a x + x x)$. En faisant A F $= r$ & la circonférence décrite avec le rayon AF

$= c$, l'on aura la circonférence décrite avec le rayon $y = \frac{cy}{r}$, & la ſurface du cercle auquel appartient cette circonférence $= \frac{cy^2}{2r}$. Multipliant cette ſurface par dx, l'on a l'élément du ſolide engendré par le plan APM $= \frac{cy^2 dx}{2r} = \frac{c.p}{2ra} \times (axdx - x^2 dx)$, en ſubſtituant la valeur de y^2. Si l'on ſuppoſe maintenant que l'on multiplie cet élément par ſa diſtance AP $= x$ à la ligne Tn, l'on aura le moment de cet élément $= \frac{cp}{2ra} \times (ax^2 dx - x^3 dx)$, dont l'intégrale $\frac{cp}{2ra} \times \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ ſera la ſomme des momens, qui étant diviſée par la ſomme des élémens, $\frac{cp}{2ra} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, donnera la diſtance cherchée $= \frac{\frac{a}{3}x - \frac{x^2}{4}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}} = \frac{\frac{4ax - 3x^2}{12}}{\frac{3a - 2x}{6}} = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$, lorſqu'il s'agira du ſolide engendré par le plan APM; donc on aura cette diſtance en faiſant $6a - 4x : 4a - 3x :: x :$ à la diſtance cherchée.

74. COROLLAIRE. Si l'on ſuppoſe $x = \frac{1}{2}a$, cette diſtance ſera $= \frac{\frac{1}{4}a^2}{4a} = \frac{1}{16}a$. Si $x = a$, cette diſtance ſera $= \frac{ax}{2x} = \frac{1}{2}a$. C'eſt-à-dire,

que la distance du centre de gravité d'un demi-ellipsoïde engendré par le plan d'une ellipse autour de son grand axe par rapport à la tangente au sommet A, est égale à $\frac{5}{16}$ de cet axe, & la distance du centre de gravité de l'ellipsoïde entier est au milieu de l'axe.

75. PROBLÊME. *Si la courbe* BAD *est un arc de cercle, on demande la distance du centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan de la courbe autour de l'axe* AP, *par rapport à la ligne, ou si l'on veut au plan* T *n* (Fig. 29). Si l'on fait le paramètre $p = a$, l'équation à l'ellipse deviendra $y^2 = ax - xx$ qui est l'équation du cercle. Donc l'élément $\frac{cp}{2ra}(axdx - x^2dx)$ qu'on a trouvé dans le problême précédent sera $= \frac{c}{2r} \cdot (axdx - x^2dx)$, & le moment de cet élément $\frac{cp}{2ra}(ax^2dx - x^3dx)$ sera $= \frac{c}{2r}(ax^2dx - x^3dx)$, & en divisant la somme des momens par celle des élémens, on aura la distance cherchée $= \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$. Si l'on fait $x = \frac{1}{2}a$, cette distance sera $= \frac{5}{16}a$, & si l'on fait $x = a$, la distance deviendra $= \frac{1}{2}a$. Ainsi, si une sphère & un sphéroïde elliptique ont un même axe, l'hémisphère & le demi-conoïde elliptique, la sphère & le sphéroïde elliptique auront le même centre de gravité.

76. PROBLÊME. *Supposant que la courbe* BAD *est une hyperbole, dont* AF *soit l'axe, on demande la distance à la ligne* T *n, du centre de gravité du solide engendré par la révolution du plan* APM *autour de l'axe*

AF (Fig. 29). L'équation à l'hyperbole étant $y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx)$, l'élément du ſolide de révolution ſera $\frac{cp}{2ra}(axdx + xxdx)$, on ſuppoſe que AF eſt le prolongement du premier axe de l'hyperbole, & le moment de cet élément ſera $= \frac{cp}{2ra}(ax^2dx + x^3dx)$; donc en diviſant la ſomme des momens par celle des élémens, l'on aura la diſtance cherchée $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$. Si $x = a$, la diſtance cherchée ſera $= \frac{7aa}{10 \cdot a} = \frac{7}{10} \cdot a$.

77. PROBLÊME. *Trouver la diſtance du centre de gravité d'un arc* M m (Fig. 30), *dont le rayon eſt* $= a$, *& dont la corde eſt parallèle à la ligne* TT, *qui paſſe par le centre du cercle.* Si l'on mene la ligne AB par le milieu de l'arc, & qu'on conçoive les points *n* & N comme des poids ſuſpendus aux extrémités du levier N *n* ſoutenu en *i* par la ligne AB, il eſt évident que le centre de gravité des points *n* & N ſera ſitué ſur la ligne AB & ce ſera la même choſe pour les points M & *m* & tous les autres points correſpondans de l'arc MB *m*. Soit maintenant l'arc MB $= mB = z$, l'on aura $2dz$ pour la différentielle de l'arc donné. Si l'on multiplie cette différentielle par $Ai = x$, ou par la diſtance du centre de gravité des deux élémens ſitués en *n* & N, ou ſi l'on multiplie $2dz$ par x, l'on aura le moment de l'arc MB*m* $= 2xdz$. Mais (Fig. 3) par la nature du cercle, en faiſant CH $=$

x, $Ci = a$, $Hi = y$, $ir = dz$, les triangles irl, CHi (ſemblables parce que leurs côtés ſont perpendiculaires) donnent $ir : dz :: lr : dy :: Ci : CH$; donc $dz = \frac{ady}{x}$, ou $x\,dz = a\,dy$, $2x\,dz = 2a\,dy$; donc ſi l'on diviſe la ſomme des momens S. $2x.dz$ = S. $2a.dy$ = $2ay$ par la ſomme des élémens S. $2\,dz = 2z$, l'on aura $\frac{2ay}{2z}$ pour la diſtance cherchée.

COROLLAIRE. Donc (Fig. 30) $2z : 2y :: Mm : a : Ai$, diſtance cherchée ; c'eſt-à-dire, un arc eſt à ſa corde, comme le rayon eſt la diſtance du centre de gravité de cet arc au centre du cercle. Si l'arc eſt une demi-circonférence l'on aura la demi-circonférence eſt au diametre comme le rayon eſt à la diſtance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle. Si l'arc eſt la circonférence entiere, alors on a $y = 0$, & $\frac{2ay}{2z} = 0$; c'eſt-à-dire, que le centre de gravité de la circonférence du cercle eſt ſitué dans le centre même du cercle.

78. PROBLÊME. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide.* Je conçois un plan T T parallèle à la baſe & qui paſſe par le ſommet A de la pyramide (Fig. 31). Je tire la ligne A C par le centre de gravité de la baſe ; il eſt viſible que cette ligne paſſe auſſi par le centre de gravité de la ſection Mfm faite parallèlement à la baſe, & que les plans Mfm, BFD ſont ſemblables. Faiſons donc $AP = x$, $Pp = dx$, $AC = a$, & le plan de la baſe $= b^2$, il eſt clair que les plans Mfm, BFD ſont entre eux comme les quarrés des lignes AP & AC ;

donc $aa : bb :: x^2$: au plan $Mfm = \frac{bb\,x^2}{aa}$. Multipliant ce plan par dx, l'on aura l'élément de la pyramide $= \frac{bb\,x^2\,dx}{aa}$, & multipliant cet élément par x, l'on aura le moment de cet élément (par rapport au plan TT) $= \frac{b^2\,x^3\,dx}{a^2}$. Diviſant la ſomme $\frac{b^2\,x^4}{4\,a^2}$ des momens, par $\frac{b^2\,x^3}{3\,a^2}$, ſomme des élémens, l'on a $\frac{3\,x}{4}$ pour la diſtance du centre de gravité de la pyramide A M f m au plan T T. Si l'on fait $x = a$, la diſtance du centre de gravité de la pyramide entiere ſera $= \frac{3}{4}\,a$. Prenant donc A P $= \frac{3}{4}\,a$, le point P ſera le centre de gravité de la pyramide. Si la ligne A C n'étoit pas perpendiculaire à la baſe, on méneroit A c perpendiculairement à cette baſe, & faiſant A $c = g$, A $n = x$, n L $= dx$, on prouveroit facilement que le centre de gravité de la pyramide entiere eſt éloigné du plan T T de la quantité A $n = \frac{3}{4}\,g$. Si l'on joint enſemble les points c & C, n & P, les triangles ſemblables A C c, A P n donneront $g : \frac{3}{4}\,g :: a :$ A P $= \frac{3}{4}\,a$. Mais le centre de gravité de la pyramide eſt ſitué dans la ligne A C qui paſſe par les centres de tous les élémens; donc il eſt ſitué en P.

COROLLAIRE. Donc le centre de gravité d'un cône eſt ſitué ſur l'axe de ce cône aux $\frac{3}{4}$ de cet axe, à compter depuis le ſommet; car le cône

eſt une pyramide dont la baſe eſt circulaire. Ce ſeroit la même choſe ſi la baſe de ce cône étoit une ellipſe, alors on auroit un cône qu'on pourroit appeller *cône elliptique.*

79. PROBLÊME. *Trouver la diſtance du centre de gravité de la ſurface ſphérique* MAN (*produite par la révolution de l'arc* AM *autour du diamètre* AB) *au plan* TT *perpendiculaire au ſommet du diamètre* AB (Fig. 32). Soit le diamètre AB $= 2a$, l'abſciſſe AP $= x$, l'ordonnée PM, ou iL, ou pm (car toutes ces ordonnées étant infiniment proches ſont cenſées égales) $= y$, l'arc infiniment petit Mm ſera (ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus 31) $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Si l'on conçoit que cet arc tourne autour de l'axe, il engendrera une zône dont le centre de gravité ſera ſitué évidemment ſur cet axe, l'élément de la ſurface ſera (43) $= \frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $= \frac{c}{r} y \cdot \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (puiſque $Mm = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$) $= \frac{c}{r} \cdot adx \cdot \frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, (en ſubſtituant la valeur de y) $= \frac{cadx}{r}$. Si l'on multiplie cet élément par ſa diſtance AP $= x$ au plan TT, le moment de cet élément ſera $= \frac{c}{r} axdx$. Si l'on diviſe la ſomme $\frac{c}{2r} ax^2$ des momens par la ſomme $\frac{c}{r} \cdot ax$ des élémens, l'on aura la diſtance cherchée $= \frac{1.x}{2}$; c'eſt-à-dire, que

la distance du centre de gravité d'une surface sphérique MAN, par rapport au sommet A du diamètre, sera située au milieu de la hauteur de cette surface.

Si l'on comptoit les abscisses du centre, & qu'on demandât la distance du centre degravité de la zone M *f g* N par rapport au centre C, on auroit CP $= x$ & l'élément de l'arc du cercle $m\,\mathrm{M} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ (par le N°. 31), $y = \sqrt{(aa - xx)}$, & l'expression de l'élément de la zone seroit $\frac{c}{r} \cdot y \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{r} \cdot a \cdot dx$; le moment de cet élément seroit $\frac{c}{r} \cdot a \cdot x\,dx$, & la distance cherchée $= \frac{\frac{c}{r}\,\mathrm{S}.\,a\,x\,dx}{\frac{c}{r}\,\mathrm{S}.\,a\,dx} = \frac{x}{2}$. Mais CP $= x$ est la hauteur de la zone ; donc le centre d'une zone sphérique, compriſe entre deux plans parallèles, dont l'un passe par le centre du cercle générateur est au milieu de la hauteur de la zone.

COROLLAIRE. Il est aisé de voir que la distance du centre de gravité au centre de la sphere doit toujours augmenter de la moitié de la hauteur dont la zone augmente ; ce qui ne peut être, à moins que le centre de gravité d'une zone quelconque ne soit situé au milieu de cette zone ; car supposons que la hauteur C*p* soit d'un pied, la distance du centre de gravité de cette zone, par rapport au centre, sera d'un demi-pied. Si on ajoûte une autre zone dont la hauteur P*p* soit aussi d'un pied, la distance du centre de gravité de la zone totale sera

maintenant d'un pied ; donc le centre de gravité de la zone ajoûtée étoit au milieu de cette zone, puiſque le centre de gravité des deux zones (égales en ſurface, parce qu'elles ont même hauteur) ſe trouve au point qui répond à la jonction des deux zones.

80. PROBLÊME. *Trouver la diſtance du centre de gravité d'un ſecteur circulaire* A M *m* (Fig. 30) *par rapport au centre* A *du ſecteur.* Ayant tiré les rayons A *n*, A *t* infiniment proches du rayon A M, le triangle A M *n* aura ſon centre de gravité ſitué ſur la ligne A *t* qui diviſe la baſe M *n* en deux également ; & cette diſtance par rapport au ſommet A ſera $= \frac{2}{3}$ A *t* $= \frac{2}{3}$ *a*, en faiſant A *t* $= a$; c'eſt une ſuite de ce qu'on a dit ci-deſſus (69) ; donc ſi l'on conçoit le ſecteur diviſé en une infinité de pareils triangles, tous ces triangles auront leur centre de gravité à la même diſtance du ſommet A ; donc ſi du point A pris pour centre avec un rayon A *b* $= \frac{2}{3}$ *a*, l'on décrit un arc de cercle *b f*, tous les centres de gravité de ces triangles ſeront ſitués ſur cet arc ; donc le centre *o* de gravité du ſecteur ſera le même que celui de l'arc *bf* ; or nous avons vu (77), qu'on a déterminé le centre de gravité d'un arc en faiſant l'arc eſt à la corde, comme le rayon eſt à la diſtance du centre de gravité de l'arc au centre du cercle ; donc l'arc *b f* : *bf* :: A *b* $= \frac{2}{3}$ *a* : A *o*, diſtance cherchée.

81. REMARQUE. Il n'eſt pas difficile de trouver des formules généralés pour la diſtance du centre de gravité des ſurfaces & des ſolides de révolution, par rapport à une ligne ou à un axe quelconque. Soit A B l'axe d'une courbe quelconque (Fig. 32), l'élément M *m* de l'arc A M ſera $= ds$, en faiſant cet arc $= s$, le centre de gravité de l'arc M *m*, ſera ſitué au milieu L de cet arc. La diſtance L *i* à l'axe

de révolution étant exprimée par y, le moment de cet arc ſera $= yds$. Si l'on fait $= u$ la diſtance bc du centre de gravité de l'arc AM à la ligne AB, l'on aura cette diſtance en diviſant la ſomme S. yds des momens par la ſomme S. ds des élémens, ou par s; donc $u = \frac{S.yds}{s}$. Si la courbe eſt rapportée à un foyer C, en faiſant CM $= y$, l'angle MCA $= x$, le triangle rectangle MCP donne $r : \text{ſin. } x :: y : MP = \frac{y \text{ ſin. } x}{r}$. Multipliant cette quantité par ds, l'on aura le moment de $ds = \frac{y \text{ ſin. } x.ds}{r}$; donc $u = \frac{S.y \text{ ſin. } x.ds}{r.s}$. En déterminant la diſtance du centre de gravité du même arc par rapport à une autre ligne TT perpendiculaire à la ligne AB, & menant les lignes Tb, bc, parallèles aux lignes AB & AT, & à la diſtance trouvée, de maniere que Tb ſoit menée à la diſtance $bc = u$ & bc à la diſtance V $= b$T qui appartient à la ligne AT, le point b ſera déterminé par le concours de ces deux lignes.

S'il s'agit de la ſurface AMP (Fig. 33), en appellant s cette ſurface, ds ſera ſon élément. Multipliant l'élément PpMm $= ds$ par la diſtance Lt $= \frac{Ln}{2} = \frac{y}{2}$, l'on aura le moment de l'aire $= \frac{1}{2}$ S. yds; donc l'on aura $u = \frac{\frac{1}{2} S.yds}{s}$. Si l'on ſuppoſe que les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes, l'élément de l'aire ſera $= ydx$; donc dans ce cas u eſt $= \frac{\frac{1}{2} S.y^2 dx}{S.ydx}$.

Si la courbe AD eſt rapportée à un foyer F (Fig. 34), on fera FM $= y$, l'arc Mn décrit du foyer F $= dx$, l'angle AFM $= V$ & le centre de gravité du triangle MmF $= \left(\frac{ydx}{2}\right)$ ſera ſitué en i à la diſtance $\frac{2}{3}.y$ de F (comme il ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus, 69); donc en faiſant $r : \text{ſin. } V :: \frac{2}{3}.y : \frac{2}{3.r}.y \text{ ſin. } V$, l'on aura la

distance P*i* du centre de gravité de l'élément de l'aire par rapport à la ligne A F. Si l'on multiplie cette quantité par $\frac{y\,dx}{2}$, l'on aura le moment du triangle F M *m* $=$ $\frac{1}{3r}\cdot y^2\cdot$ sin. V. dx; donc en divisant la somme des momens par celle des élémens, l'on aura la distance *b c* du centre de gravité de l'aire entiere $= u = \frac{\frac{1}{3}\,S.\,y^2\,\text{sin. V}\,dx}{\frac{1}{2}\,S.\,y\,dx}$.

Si l'on fait $r : d\,V :: y : dx$, l'on aura $\frac{y\,dV}{r} = dx$. Ainsi l'on pourra chasser dx de sa formule précédente. Si l'on veut avoir la distance *g b* du centre de gravité par rapport à une ligne *f g* parallèle à F A & distante de F A de la quantité *p*, on cherchera la distance $u = bc$, & l'on aura $u + p$ pour la distance cherchée, ce qui est évident.

S'il s'agit d'un solide *m* A M (Fig. 29), appellant *s* l'élément de ce solide, *t* la distance de cet élément à un plan donné de position; la distance du centre de gravité du solide par rapport à ce plan, sera $= \frac{S.\,t\,ds}{s}$. S'il s'agit d'un solide de révolution, l'on aura $ds = \frac{c}{2r}\,y^2\,dx$ & $u = \frac{\frac{c}{2r}\cdot S.\,y^2\,t\,dx}{\frac{c}{2r}\,S.\,y\,y\,dx} = \frac{S.\,y^2\,t\,dx}{S.\,y^2\,dx}$.

82. Il faut maintenant donner la fameuse *Regle de Guldin*, selon laquelle, *une quantité quelconque située sur le même plan que l'axe de révolution produit en tournant une quantité qui est égale au produit de la quantité qui tourne par le chemin que parcourt son centre de gravité.* Ainsi une ligne engendre une surface égale au produit de cette ligne multipliée par l'arc que décrit le centre de gravité de cette ligne, & une surface produit un solide égal à cette surface multipliée par le chemin parcouru par le centre de gravité de la surface. Nous allons dé-

montrer cette regle élégante, 1°. Pour les ſurfaces, & en ſecond lieu pour les ſolides.

Soit (Fig. 35) la ligne A M $= s$, l'élément M $m = ds$, la diſtance fn du centre de gravité n de cet élément à l'axe de révolution L $g = y$, le moment de cet élément ſera $= yds$, & la diſtance L C du centre de gravité de la ligne A M à l'axe L g ſera $= \frac{S.yds}{S.ds} = \frac{S.yds}{s} = u$. Donc S. $yds = us$. Si l'on multiplie les deux termes de cette équation par le rapport $\frac{c}{r}$ de la circonférence au rayon, l'on a $\frac{c}{r}$ S. $yds = \frac{c}{r} us = s.\ \frac{c}{r} u$. Mais $\frac{c}{r}.u$ eſt la circonférence décrite par le rayon L C $= u$, ou eſt la circonférence décrite par le centre de gravité de l'arc A M, & $\frac{c}{r} y$, la circonférence décrite par le milieu n de l'élément ds, cette circonférence multipliée par l'élément ds, donne l'élément de la ſurface engendrée, laquelle eſt $=$ S. $\frac{c}{r} yds$; donc cette ſurface eſt égale au produit de la ligne A M multipliée par le chemin que parcourt le centre de gravité de cette ligne.

Soit la ſurface A D B (Fig. 36) $= s$, ſon élément b N m M $= ds$, en faiſant $nP = CL = y$, & ſuppoſant que C eſt le centre de gravité de cet élément, il eſt viſible que l'on aura yds pour le moment de cet élément par rapport à l'axe P L; donc la diſtance du centre de gravité de la ſurface à l'axe P L, ſera $= \frac{S.yds}{s} = u$; donc S. $yds = us$; donc S. $\frac{c}{r} yds = \frac{c}{r} us$. Mais $\frac{c}{r} y$ eſt la circonférence décrite par le point n ou par le point C & $\frac{c}{r} yds$ eſt le ſolide engendré par l'élément m M N b, S. $\frac{c}{r} yds$ eſt le ſolide engendré par la ſurface s; donc ce ſolide eſt $= \frac{c}{r} us$. Mais $\frac{c}{r} u$ eſt la circonférence décrite par le centre de gravité de la ſur-

face s; donc le ſolide engendré par la ſurface s eſt égal au produit de cette ſurface multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette ſurface.

Dans cette regle on doit remarquer que ſi une partie de la ligne ou de la ſurface qui tourne étoit ſituée de l'autre côté de l'axe de rotation ou ne ſe trouve pas le centre de gravité de la ligne ou de la ſurface, les élémens de cette partie ayant des diſtances négatives par rapport à l'axe de rotation, la ſurface ou le ſolide engendrés par cette partie, doivent être pris négativement; donc la différence des deux parties engendrées, ou des quantités engendrées ſera égale à la quantité qui tourne multipliée par le chemin que parcourt ſon centre de gravité. Si l'axe de rotation paſſe par le centre de gravité les quantités engendrées par les parties ſituées de part & d'autre ſont égales. Si l'on cherche le centre de gravité de chaque partie en particulier, on trouvera facilement la quantité engendrée par chaque partie, & la ſomme des quantités ainſi engendrées.

La Regle de Guldin eſt d'un très-grand ſecours pour la réſolution des problêmes, comme nous l'allons faire voir.

83 PROBLEME. *Suppoſant que les lignes* A, B, D, F, *f, tournent autour de l'axe* R L, *trouver la ſomme des ſurfaces engendrées par ces lignes* (Fig. 37). Ayant joint les lignes B & A par la ligne B A qui paſſe par le milieu de ces lignes, je diviſe la ligne B A au point P en raiſon réciproque des lignes A & B, le point P ſera le centre de gravité de ces deux lignes; tirant par le point P & par le milieu D de la ligne D, la ligne P D, je diviſe cette ligne en p en raiſon inverſe de D & de A + B, le point p eſt le centre de gravité des trois lignes A, B, D. Par le point p & le milieu de F, je mene F p & je diviſe cette ligne en g, en raiſon réciproque de F & de A + B + D, le point g eſt le centre de gravité des lignes A, B, D, F. Par le milieu de f je mene $g f$, & diviſant cette ligne en M en raiſon réciproque de f & de A + B + D + F, le point M eſt le centre de gravité des cinq lignes données. Par le point M, je mene la ligne M N parallele à l'axe L R & égale à A + B + D + F + f, la ligne N M, en tournant autour de L R, produira une ſurface égale à la ſomme des ſurfaces que produiroient les lignes A, B, D, F, f.

84. PROBLEME. *L'on a deux figures* P & A B D *f g qui tournent autour de l'axe* R L (Fig. 38), *on demande un ſolide égal à la ſomme des ſolides engendrés par ces figures.* Je cherche (69), le centre de gravité P du triangle P; je diviſe l'autre figure en triangles & je cherche le centre de gravité particulier de chacun des triangles qui compoſent la figure. Joignant les centres de gravité *s* & *i* des deux triangles A *f g*, A *f* D par la ligne *s i*, je diviſe cette ligne en *r* en raiſon réciproque des aires de ces triangles, le point *r* ſera le centre commun de gravité de ces triangles. Suppoſant que le point *b* eſt le centre de gravité du triangle A B D, je tire *b r* & diviſant cette ligne en *n* en raiſon réciproque du triangle A B D & de la ſomme des autres triangles, le point *n* eſt le centre de gravité des trois triangles qui compoſent cette figure. Menant la ligne P *n* & diviſant cette ligne en C en raiſon inverſe des aires des deux figures, le point C ſera le centre de gravité des deux figures. Si l'on prend un rectangle L R M *m*, égal à la ſomme des aires des deux figures, & tel que ſon centre de gravité ſoit ſitué en C, ce rectangle en tournant autour de L R engendrera un cylindre égal à la ſomme des ſolides qu'engendreroient les figures données; il eſt aiſé de voir comment il faudroit s'y prendre ſi l'on avoit un plus grand nombre de figures.

85. PROBLEME. *Suppoſant qu'un cercle* A *b g f* tourne *autour de l'axe* L F, *trouver le rapport des ſurfaces engendrées par les demi-circonférences b g f, b* A *f* (Fig. 39). Selon ce qu'on a dit ci-deſſus (77), en faiſant le quart ce cercle *b g* = *n*, ou la demi-circonférence *b g f* = 2 *n*, le rayon = *r*, l'on aura $2n : 2r :: r : C\,m = \frac{rr}{n}$, diſtance du centre de gravité de la demi-circonférence *b g f* au centre C; de même la diſtance C *p* du centre de gravité de la demi-circonférence *b* A *f*, au centre du cercle ſera = $\frac{rr}{n}$. Faiſant F C = *u*, l'on aura F *m* = $u + \frac{rr}{n}$ & F *p* = $u - \frac{rr}{n}$. Mais les deux demi-circonférences étant égales, les ſurfaces engendrées par ces demi-

circonférences ſont entr'elles comme les circonférences décrites par les points m & p ; donc la ſurface engendrée par la demi-circonférence $b\,g\,f$, eſt à la ſurface engendrée par la demi-circonférence $b\,A\,f$: : $u+\frac{rr}{n} : u-\frac{rr}{n}$ (car les circonférences des cercles ſont dans le rapport de leurs rayons) : : $nu+rr : nu-rr$.

REMARQUE. La regle de Guldin ne ſuppoſe pas que la révolution ſoit entiere & il eſt aiſé de voir qu'elle a lieu également en ſuppoſant que la lettre c dans le rapport $\frac{c}{r}$ déſigne un arc quelconque de cercle.

86. La regle de Guldin peut aider le calcul intégral, comme on le va faire voir dans les courbes qu'on peut décrire à la maniere de la conchoïde de Nicomède. (Voyez ce qu'on a dit ſur cette courbe dans la premiere partie de cet ouvrage, *Courbes Algébriques*, N°. 69). Suppoſons que A L (Fig. 40), repréſente une courbe quelconque, hors de laquelle ſoit ſitué un pôle C, par lequel paſſe la ligne C D B qui rencontre la courbe donnée en A, ayant les parties A B, A D égales ; que cette ligne ſe meuve de maniere qu'elle paſſe toujours par le pôle C & que le point A ſe trouve toujours dans la ligne A L ; les points B & D décriront le premier la courbe B F, le ſecond la courbe D b. Suppoſons que cette ligne eſt parvenue dans la ſituation C F *, & qu'elle prend enſuite une ſituation infiniment proche C f. Du centre C, je décris les arcs F m, L n, $b\,i$; je fais C A $= b$, D A $=$ A B $=$ L F $=$ L $b = a$, C L $= y$, L $n = dx$. L'eſpace F $f\,b\,s$ eſt cenſé égal à la zone circulaire F $m\,b\,i$, produite par le mouvement de la ligne F $b = 2\,a$ autour du centre C. Mais le centre de cette ligne eſt le point L qui décrit l'arc L n ; donc cette zone eſt $= 2adx$; donc l'eſpace F $f b$ eſt $= 2\,a\,d\,x$. Qu'on diviſe F L en deux également en P & que du

* On peut ſuppoſer que la ligne B C s'allonge ou ſe racourcit du côté du point C, quoique la partie A B $=$ F L ſoit toujours $=$ A D $=$ L b.

point

point C on décrive l'arc Pp, qui étant à l'arc dx comme $y + \frac{a}{2} : y$, ſera $= dx + \frac{a\,dx}{2y}$, donc la zone $F\,m\,L\,n$, & par conſéquent auſſi l'eſpace $F\,f\,L\,l$ ſera $= a\,dx + \frac{a\,a\,dx}{2y}$. De même ayant diviſé $L\,b$ en deux parties égales en g & du point C comme centre ayant décrit l'arc gr, on trouvera l'eſpace $L\,l\,b\,s = a\,dx - \frac{a^2\,dx}{2y}$. Ainſi la différence des eſpaces $F\,f\,L\,l$, $L\,l\,b\,s$ ſera $= \frac{a^2\,dx}{y}$; donc puiſque par l'équation de la courbe AL, on peut avoir dx en y & dy, on pourra trouver l'eſpace compris entre les courbes BF, $D\,b$ & la courbe AL.

Suppoſons que la ligne AL eſt une ligne droite perpendiculaire ſur CB, & que le point B décrit la conchoïde ſupérieure de Nicomède & le point D la conchoïde inférieure. Faiſons $AL = RM = t$, l'on aura $CL = y = \sqrt{(bb + tt)}$, $Ll = dt$. Les triangles rectangles CAL, nLl ont les angles nlL, CLA qu'on peut regarder comme égaux (à cauſe des lignes CL, C l infiniment proches); donc ces triangles ſont ſemblables & donnent $L\,n\,(dx) : L\,l = dt :: CA = b : CL = \sqrt{(bb + tt)}$; donc $dx = \frac{b\,dt}{\sqrt{(bb + tt)}}$. Subſtituant cette valeur de dx dans $2\,a\,dx$, l'on a l'eſpace $F\,f\,b\,s = \frac{2\,a\,b\,dt}{\sqrt{(bb + tt)}} = \frac{4\,a}{b} \cdot \frac{b\,b\,dt}{2\sqrt{(bb + tt)}}$ qui dépend de la quadrature de l'hyperbole. Du point A pris pour centre, avec le demi-axe $AC = b$, décrivez l'hyperbole équilatere CR; ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (21) * le

*En changeant a en b & y en s, le ſecteur qu'on a trouvé (21) $= S.\frac{a\,a\,dy}{2.\sqrt{(aa + yy)}}$, ſera $= S.\frac{b\,b\,ds}{2.\sqrt{(bb + ss)}}$, & l'élément de ce ſecteur ſera $= \frac{b^2\,dt}{2.\sqrt{(bb + tt)}}$.

secteur A Ç R sera $= S.\frac{b^2 dt}{2\sqrt{(bb+tt)}}$; donc l'espace B F D b est au secteur A Ç R :: $4a : b$. La différence entre les espaces F s L l, L l b s, ayant été trouvée $= \frac{a^2 dx}{y}$, cette différence sera $= \frac{a^2 b\, dt}{bb+tt} = \frac{a^2}{b} \times \frac{b^2 dt}{bb+tt}$. Mais $S.\frac{b^2 dt}{bb+tt}$ est un arc de cercle dont le rayon est $= b$ & la tangente $= t$ *; donc la différence des espaces ABFL, ALDb, sera au produit de cet arc circulaire multipliplié par a, comme $a : b$. Puisque la somme des espaces dont on vient de parler, dépend de la quadrature de l'hyperbole, tandis que la différence de ces espaces dépend de la quadrature du cercle, il est visible que chacun des espaces compris entre la ligne A L & les courbes B F & D b dépend à la fois de la quadrature de l'hyperbole & de celle du cercle, car il est visible que le plus grand de ces espaces est égal à leur demi-somme, plus leur demi-différence ; le plus petit étant égal à leur demi-somme moins leur demi-différence **.

REMARQUE. Si l'on pouvoit connoître exactement la longueur de la circonférence du cercle, en multipliant cette longueur par le demi-rayon, l'on auroit

* Selon ce qu'on a dit ci-dessus (31), l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la tangente $= x$, est $= \frac{aa\,dx}{aa+xx}$; donc si le rayon $= b$, & la tangente $= t$, l'élément de l'arc sera $= \frac{b^2 dt}{bb+tt}$.

** On a vu dans la première partie de cet ouvrage (voyez *les Equations*), que des deux quantités, la plus grande est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la différence, & que la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

l'aire ou la quadrature du cercle ; & ſi l'on avoit l'aire du cercle en la diviſant par le demi-rayon, l'on trouveroit la circonférence. Il eſt aiſé de voir que la quadrature du cercle dépend de la rectification de ſa circonférence. C'eſt dans ce ſens qu'on vient de dire que les eſpaces dont nous venons de faire mention dépendent de la quadrature du cercle.

DE LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES.

87. J'entends par *Méthode inverſe des tangentes*, l'art de trouver l'équation d'une courbe par quelqu'une de ſes propriétés, comme par le moyen de ſa ſous-tangente, ſa tangente, ſa normale, ſa ſous-normale, ſa quadrature, &c. Pour cela on égalera la propriété donnée, ou ſa différentielle à l'expreſſion générale de la même propriété exprimée par le moyen du calcul différentiel. L'on tâchera, par le moyen de l'équation qui en réſultera, de trouver l'équation de la courbe. Les exemples ſuivans pourront faire comprendre l'artifice de cette méthode.

88. PROBLÊME. *Trouver la nature de la courbe dont la ſous-tangente eſt* $= \frac{2y^2}{a}$. L'expreſſion générale de la ſous-tangente étant $\frac{y\,dx}{dy}$, l'on aura l'équation $\frac{2y^2}{a} = \frac{y\,dx}{dy}$, ou $2y^2\,dy = a\,y\,dx$, $2y\,dy = a\,dx$, & en intégrant $\frac{2y^2}{2} = ax$, ou $y^2 = ax$, équation à une parabole dont le paramètre eſt $= a$.

89. PROBLÊME. *Quelle eſt la courbe dont l'ordonnée y eſt égale à la ſous-tangente.* L'on a y

$= \frac{y\,dx}{dy}$, $y\,dy = y\,dx$, $dy = dx$, équation à la cicloïde (Section précédente, note du N° 13). Si l'on avoit un triangle rectangle, isocelle ABD (Fig. 41), en faisant l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée PM $= y$, l'on auroit toujours $y = x$; ainsi l'équation $dy = dx$ qui donne $y = x$, appartient aussi à un triangle rectangle isocelle.

90. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle la sous-tangente est troisieme proportionnelle à* $a - x$ *&* dy. L'on aura $a - x : y :: y : \frac{y\,dx}{dy}$; donc $a\,y\,dx - x\,y\,dx = y^2\,dy$, $a\,dx - x\,dx = y\,dy$. donc, en intégrant, $ax - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$, ou $2ax - xx = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre seroit $2a$; ainsi la courbe demandée est un cercle, on suppose l'angle des co-ordonnées droit.

91. PROBLÊME. *Trouver la courbe dans laquelle la quantité constante* a *est à l'ordonnée* y *comme* $\sqrt{(aa + yy)}$ *est à la sous-tangente.* Par la nature du Problême $a : y :: \sqrt{(aa + yy)} : \frac{y\,dx}{dy}$; donc $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{y \cdot \sqrt{(aa + yy)}}{a}$; donc $dx = \frac{dy\sqrt{(aa + yy)}}{a}$, & $x = S.\ \frac{dy.\sqrt{(aa + yy)}}{a}$. Si avec un paramètre $= 2a$, l'on décrit une parabole AM (Fig. 1ere), dont l'abscisse, AP $= u$, l'ordonnée PM $= y$, par la nature de la parabole, l'on aura $y^2 = 2a \cdot u$, $u = \frac{y^2}{2a}$, $du = \frac{y\,dy}{a}$, $du^2 = \frac{y^2\,dy}{aa}$: Mais lorsque l'abscisse

AP est $= x$, l'élément M m de l'arc A m est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc lorsque cette abscisse $= u$, l'on aura M $m = \sqrt{(du^2 + dy^2)}$; substituant dans cette expression la valeur de du^2, l'on a $Mm\sqrt{\left(\frac{v^2 dy^2 + aa dy^2}{aa}\right)} = \frac{dy}{a}.\sqrt{(aa + yy)}$ dont l'intégrale S. $\left(\frac{dy.\sqrt{(aa + yy)}}{a}\right)$ est $=$ AM $= x$. Ainsi la courbe cherchée est telle que si elle a les ordonnées P M d'une parabole, ses abscisses doivent être égales aux arcs A M correspondans à ces ordonnées; de sorte que sa description dépend de la rectification de la parabole.

92. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la sous-normale est égale à une constante a.* L'expression de la sous-normale étant $\frac{y\,dy}{dx}$, l'on aura $\frac{y\,dy}{dx} = a$, $y\,dy = a\,dx$, $\frac{y^2}{2} = ax$, $y^2 = 2\,ax$. Ainsi la courbe cherchée est une parabole dont le paramètre est $2\,a$.

93. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la sous-normale est* $= a - x$. Par la nature du problême $\frac{y\,dy}{dx} = a - x$, $y\,dy = a\,dx - x\,dx$, $\frac{y^2}{2} = ax - \frac{x^2}{2}$, $y^2 = 2\,ax - xx$. Donc la courbe cherchée est un cercle dont le diamètre est $2\,a$.

94. PROBLÊME. *Trouver une courbe dont la sous-normale soit* $= \frac{ap - 2px}{2a}$. L'on a $\frac{y\,dy}{dx}$

$= \frac{ap - 2px}{2a}$, $2ay\,dy = ap\,dx - 2px\,dx$, $ay^2 = apx - px^2$, ou $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$ équation à une ellipse dont l'axe des x est $= a$, le paramètre de cet axe étant $= p$.

95. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la sous-normale* $= \sqrt{ax}$. Donc $\frac{y\,dy}{dx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $y\,dy = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, $\frac{y^2}{2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \times a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, $y^2 = \frac{4}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{ax} = \frac{2}{3} x \sqrt{4ax}$. Sur l'axe AP (Fig. 42), je décris une parabole AM avec un paramètre $= 4a$, & & supposant l'ordonnée PM $= u$, l'abscisse AP $= x$, par la nature de la parabole, l'on a $u^2 = 4a.x$, $u = \sqrt{4a.x}$. Si donc on cherche une moyenne proportionnelle Pm entre l'ordonnée u de la parabole, & $\frac{2}{3} x$, en faisant P$m = y$, l'on aura $y^2 = \frac{2}{3} x \sqrt{4qx}$. Si l'on fait la même chose pour chacune des ordonnées de la parabole, l'on aura la courbe Am, qu'on peut appeller quadratrice de la parabole. Car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (4), l'aire parabolique APM est $\frac{2}{3} yx$, en faisant PM $= y$. Donc lorsqu'on fait PM $= u$, cette aire sera $= \frac{2}{3} xu = \frac{2}{3} x \times \sqrt{4ax}$; donc la courbe A m est telle que les quarrés de ses ordonnées sont égaux aux aires paraboliques correspondantes.

96. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont la normale eſt conſtante &* $= a$. L'expreſſion générale de la normale étant $\frac{y}{dx}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, l'on aura $a=\frac{y}{dx}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $a\,dx=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $a^2dx^2=y^2dx^2+yydy^2$, $a^2dx^2-y^2dx^2=y^2dy^2$, $dx^2=\frac{y^2dy^2}{aa-yy}$, $dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$, $-dx=-\frac{y\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$ $=-y\,dy.(aa-yy)^{-\frac{1}{2}}$; donc en intégrant, $-x=(aa-yy)^{\frac{1}{2}}$, $x^2=aa-yy$, $y^2=aa-xx$, équation à un cercle dont le rayon $= a$.

97. PROBLÊME. *Trouver une courbe dont l'aire ſoit* $= ay$. L'élément des aires eſt, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (2), eſt $= y\,dx$; donc ſi l'on différencie l'aire donnée l'on aura $a\,dy=y\,dx$, $\frac{y\,dx}{dy}=a$, équation différentielle d'une logarithmique dont la ſous-tangente $= a$, ſection précédente (21); ainſi la courbe cherchée eſt une logarithmique.

98. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont l'aire* $= a\sqrt{(aa+xx)}$. Donc $y\,dx=a\,x\,dx\times(aa+xx)^{-\frac{1}{2}}$, $y=\frac{ax}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Pour tracer cette courbe je décris une hyperbole équilatere (Fig. 43), dont le demi-axe CA ſoit $= a$.

en faisant $CP = DM = x$, $CD = PM = y$, par la nature de l'hyperbole équilatere, l'on aura $y^2 = x^2 - aa$, ou $x^2 = y^2 + aa$. Si au lieu de faire $CP = x$, l'on faisoit $CP = u$, l'on auroit $u^2 = y^2 + a^2$, $u = \sqrt{(aa + yy)} = \sqrt{(aa + xx)}$, en faisant $PM = x$. Si donc on cherche une quatrieme proportionnelle aux lignes $CP = DM$, CA, PM; ou si l'on fait $\sqrt{(aa + x^2)} : a :: x : Pm = \frac{ax}{\sqrt{(aa+xx)}}$, le point m ainsi trouvé appartiendra à la courbe $A\,m$ cherchée.

99. PROBLÊME. *Trouver la courbe dont l'aire est* $= \frac{x^3}{3a}$. Comparant l'élément de cette aire avec ydx, on trouvera $\frac{x^2}{a}\,dx = y\,dx$, $x^2 = ay$; donc si l'on prend sur la tangente AF (Fig. 1ere), les abscisses $AB = x$, & qu'on fasse $BM = AP = y$, l'on aura $(PM)^2 = x^2 = a.y$. Ainsi l'équation trouvée appartient à une parabole en prenant les abscisses sur la tangente & les ordonnées parallèlement à l'axe.

100. PROBLÊME. *Trouver la courbe qui, par sa revolution autour de son axe, a produit le solide* $\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r}$. Si l'on prend la différentielle de ce solide & qu'on le compare avec l'élément $\frac{cy^2\,dx}{2r}$ (43), l'on aura $cx\,dx - \frac{cx^2\,dx}{2r} =$

$\frac{cy^2dx}{2r}$, $x - \frac{x^2}{2r} = \frac{y^2}{2r}$, $2rx - x^2 = y^2$, équation à un cercle dont le diamètre $= 2r$.

101. PROBLÊME. *Trouver la courbe génératrice du ſolide* $= \frac{cax^2}{4r}$. Par la nature du problême, l'on a $\frac{cax\,dx}{2r} = \frac{cy^2dx}{2r}$, $ax = y^2$. Donc la courbe cherchée eſt une parabole dont le paramètre $= a$.

102. PROBLÈME. *Trouver la courbe dont l'aire eſt* $= 4a\sqrt{x}$. L'on aura $y\,dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, $y = 2ax^{-\frac{1}{2}}$, $y^2 = 4a^2x^{-1}$, $4a^2 = y^2x$, ou en faiſant $4a^2 = 1 \cdot 4a \cdot a = p^3$, $p^3 = y^2x$, équation qui appartient à une courbe hyperbolique.

103. PROBLEME. *Trouver la courbe dont la ſous-tangente eſt* $= \frac{1}{1 + L.x}$, L. *déſigne la logarithmique hyperbolique.* L'on aura $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{1}{1 + L.x}$, $y\,dx = \frac{dy}{1 + L.x}$, $dy = (1 + Lx) \cdot y\,dx$, $\frac{dy}{y} = dx + Lx \cdot dx$, S. $\frac{dy}{y} = L.y = x\,L.x$ (car la différentielle de $x\,L.x$ eſt $= dx + L.x \times dx$), $y = x^x$, équation à une courbe exponentielle.

104. PROBLEME. *Trouver l'équation de la courbe dont la ſous-normale eſt* $= y^2 \cdot (1 + L.x)$. Par la nature du problême, $\frac{y\,dy}{dx} = y^2(1 + L.x)$, $\frac{dy}{y} = dx + L.x\,dx$, $L.y = x\,L.x = L.x^x$, $y = x^x$.

105. PROBLEME. *Trouver l'équation de la courbe dont la ſous-tangente eſt conſtante &* $= \frac{1}{L.a}$. Donc $\frac{y\,dx}{dy} =$

$\frac{1}{L.a}, y\,dx = \frac{dy}{L.a}, dx.L.a = \frac{dy}{y}, x\,L.a = L.y$, ou $a^x = y$, équation d'une logarithmique dont la sous-tangente $= \frac{1}{L.a}$.

106. PROBLEME. *Trouver l'équation de la courbe dont la somme de la sous-normale & de l'abscisse est constante & = a.* L'on aura $\frac{y\,dy}{dx} + x = a, y\,dy + x\,dx = a\,dx, \frac{yy}{2} + \frac{x^2}{2} = ax, y^2 + x^2 = 2ax, y^2 = 2ax - xx$, équation au cercle.

107. PROBLEME. *Trouver la courbe dans laquelle la différence de la sous-normale & de l'abscisse est constante & = a.* Donc $\frac{y\,dy}{dx} - x = a, \frac{y\,dy}{dx} = a + x, y\,dy = a\,dx + x\,dx, \frac{y^2}{2} = ax + \frac{x^2}{2}, y^2 = 2ax + x^2$, équation à une hyperbole équilatere dont l'axe $= 2a$.

108. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-normale est à la sous-tangente, comme l'abscisse est à une ligne constante = a.* Donc $\frac{y\,dy}{dx} : \frac{y\,dx}{dy} :: x : a$, ou $dy^2 : dx^2 :: x : a$; donc $a\,dy^2 = x\,dx^2, a^{\frac{1}{2}} dy = x^{\frac{1}{2}} dx, a^{\frac{1}{2}} y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, a\,y^2 = \frac{4}{9} x^3$, équation à la seconde parabole cubique.

109. PROBLÊME. *Trouver l'équation de la courbe dans laquelle la sous-tangente est à l'abscisse en raison donnée de m : 1.* Donc $\frac{y\,dx}{dy} : x :: m : 1$,

$\frac{y\,dx}{dy} = mx$, $y\,dx = mx\,dy$, $y\,dx - mx\,dy = 0$. Diviſant cette équation par y^{m+1}, il vient $\frac{y\,dx - mx\,dx}{y^{m+1}} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{x}{y^m} + C = 0$, ou $\frac{x}{y^m} = -C$. La conſtante C étant ici arbitraire, je puis la déterminer comme je veux, pourvu qu'il en réſulte l'équation d'une courbe; ainſi je fais $-C = \frac{1}{a^{m-1}}$, & l'équation de la courbe eſt $\frac{x}{y^m} = \frac{1}{a^{m-1}}$, ou $a^{m-1}x = y^m$, équation aux paraboles de tous les genres, ſi m eſt un nombre poſitif, & aux hyperboles de tous les genres ſi m eſt un expoſant négatif.

110. PROBLEME. *Trouver la nature de la courbe dont la tangente eſt conſtante & = a.* La formule générale de la tangente (voyez la ſection premiere), eſt $= \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$; donc $a = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ou $aa\,dy^2 = y^2(dx^2+dy^2)$; donc $dx^2.y^2 = (aa-yy)\,dy^2$, $dx^2 = \frac{dy^2(aa-yy)}{y^2}$, $dx = \pm dy.\frac{\sqrt{(aa-yy)}}{y}$, équation de la tractrice.

REMARQUE. Cette courbe eſt tranſcendante, car on ne peut exprimer par les méthodes de l'algèbre finie, le rapport qu'il y a entre ſes co-ordonnées. Cependant on peut exprimer ce rapport par l'équation $x = S \pm dy.\frac{(aa-yy)}{y}$. Les courbes tranſcendantes, dont on a parlé dans la pre-

micre partie de cet ouvrage, peuvent être appellées *courbes tranſcendantes de la premiere eſpece*; & nous appellerons *tranſcendantes de la ſeconde eſpèce* les courbes dont on ne peut indiquer la nature que par une équation qui renferme quelque ſigne S d'intégration, la quantité qui eſt ſous ce ſigne ne pouvant être intégrée algébriquement, ni par les logarithmes.

111. PROBLEME. *Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point, & dont la ſous-tangente ſoit conſtante* $\&= -c$. La formule des ſous-tangentes de ces ſortes de courbes eſt (voyez la Section précédente) $\frac{y\,dx}{dy}$; donc $\frac{y\,dx}{dy} = -c$. Mais ſi l'on ſuppoſe que l'on faſſe $a : dz :: y : dx$, l'on a $dx = \frac{y\,dz}{a}$ (z étant un arc de cercle décrit d'un rayon conſtant $= a$); donc en ſubſtituant, $\frac{y^2\,dz}{a\,dy} = -c$, $dz = -a\,c\,y^{-2}\,dy$, $z = +a\,c\,y^{-1}$, $z\,y = a\,c$, équation à la ſpirale hyperbolique. Dans la ſection premiere (30), on a eu pour cette ſpirale $y\,x = c\,r$, en ſuppoſant x un arc de cercle décrit d'un rayon conſtant $= r$; donc ſi on change x en z & r en a, l'on aura $z\,y = a\,c$.

112. PROBLEME. *Trouver une courbe dont les ordonnées partent d'un point, & dans laquelle la ſous-normale* $\frac{y\,dy}{dx}$ (voyez la Section précédente), *ſoit conſtante* $\&= b$. L'on aura $\frac{y\,dy}{dx} = b$, $y\,dy = b\,dx$. Subſtituant la valeur $\frac{y\,dz}{a}$ de dx, l'on a $y\,dy = \frac{b}{a}\,y\,dz$, $a\,dy = b\,dz$, $a\,y = b\,z$. Si l'on ſuppoſe que a eſt égal à une circonférence c de cercle, que b eſt égal au rayon r de cette circonférence, & z un arc de cette même circonférence, en changeant a en c & b en r, l'on aura $c\,y = r\,z$ équation à la ſpirale d'Archimèdes.

113. PROBLEME. *Suppoſant une infinité de paraboles* A M, A *m du même ordre, mais dont les paramètres ſoient différens, trouver une courbe* B *i* M, *qui les coupe toutes perpendicu-*

lairement (Fig. 44). Supposant la chose faite, je mène les lignes M *t*, *i n* tangentes de la courbe B M & par conséquent perpendiculaires aux courbes A M, A *m*. La sous-tangente des paraboles représentées généralement par $a^m x^n = y^{m+n}$ est, (section précédente 10) $= \frac{(m+n)}{n} x$, en faisant A P $= x$; mais la sous-tangente P T est la sous-normale de la courbe B M au point correspondant à l'abscisse x, & cela a lieu également pour toutes les paraboles A M, A *m*, &c., qu'on pourroit mener. Il ne s'agit donc plus que de trouver la courbe B M ; dont la sous-normale soit $= \frac{m+n}{n} x = \frac{p}{n} x$, en supposant $m+n=p$. Mais cette sous-normale étant prise dans un sens opposé à la sous-normale P *t* de la parabole A M nous la ferons négative. Ainsi il faudra chercher la courbe dans laquelle la sous-normale soit $= -\frac{p}{n} x$. L'on aura donc $\frac{y\,dy}{dx} = -\frac{p}{n} x$, $y\,dy = -\frac{p}{n} x\,dx$, $y\,dy + \frac{p}{n} x\,dx = 0$. Et en intégrant, & faisant attention que la différentielle d'une constante C est $= 0$, nous pourrons faire $\frac{y^2}{2} + \frac{p}{2n} x^2 = C$. Supposant $C = a\,a$, l'on aura $\frac{y^2}{2} = a\,a - \frac{p}{2n} x\,x$, ou $(P M)^2 = y^2 = 2 . a\,a - \frac{p}{n} x\,x$, ou $\frac{n}{p} y^2 = \frac{2n . a\,a}{p} - x\,x$ équation à une ellipse dans laquelle le demi-axe sur lequel on prend l'abscisse x est $= \frac{2n}{p} . a\,a$. Si l'on fait $p : 2n :: a : g$, l'on aura $\frac{2n\,a}{p} = g$, & faisant $g . a = b\,b$, l'on aura $\frac{2n . a\,a}{p} = b^2$ & l'équation de la courbe sera $\frac{n}{p} y^2 = b\,b - x\,x$, ou $y^2 = \frac{p}{n} . (b\,b - x\,x)$, dans laquelle le rapport de $p : n$ est le même que celui du quarré de l'autre demi-axe de l'el-

lipſe au quarré bb; ainſi la courbe cherchée eſt une ellipſe.

Si $m = n = 1$, l'on aura $p = 2$, l'équation des paraboles ſera $ax = y^2$, & l'équation $y^2 = \frac{p}{n} \times (bb - xx)$ deviendra $y^2 = \frac{2}{1} \cdot (bb - xx)$. Ainſi une ellipſe B M qui aura ſon axe ſur la même ligne qu'une infinité de paraboles du premier genre qui ont le même ſommet A (qui eſt le centre de l'ellipſe), dans laquelle bb, eſt le quarré de la moitié de l'axe des x, le quarré de l'autre demi-axe étant à b b comme 2 : 1, ou dans laquelle le paramètre de l'axe 2 b eſt à cet axe, comme 2 : 1, coupera toutes ces paraboles à angles droits.

REMARQUE. Lorſqu'une différentielle eſt égale à 0, & qu'on peut l'intégrer, on doit ajouter une conſtante; cette conſtante, ſi elle exiſtoit, a néceſſairement diſparu dans la différentiation. Lorſque cette conſtante eſt arbitraire, il eſt de l'induſtrie du Géomètre de l'exprimer, de maniere qu'il en réſulte la ſolution la plus ſimple du problême propoſé; & s'il s'agit d'une courbe, il faut faire enſorte que la conſtante ſoit homogène aux termes de l'intégrale.

114. PROBLEME. *Supposant une infinité d'hyperboles, dont l'une soit a* M (Fig 45), *qui ayent les mêmes asymptotes perpendiculaires l'une à l'autre, & dont les abscisses soient* A P (on ſuppoſe l'angle M P A des co-ordonnées droit), *trouver une courbe* B M, *qui les coupe toutes à angles droits.* La courbe B M ſera donc perpendiculaire à la tangente M T & PT ſera la ſous-tangente de la courbe a M. Or la ſous-tangente d'une hyperbole quelconque, eſt (comme on l'a dit, ſection précédente 10) égale au quotient de l'expoſant de l'ordonnée diviſé par celui de l'abſciſſe, en prenant l'expoſant de l'abſciſſe avec le ſigne —; donc en prenant l'équation générale des hyperboles $a^{m+n} = y^m x^n$, la ſous-tangente PT ſera $= -\frac{m}{n} x$. Mais PT eſt la ſous-normale de la courbe BM, par rapport à laquelle elle eſt poſitive, parcequ'elle va du côté où doivent aller les ſous-perpendiculaires de BM par

rapport à l'origine B de la courbe. Le problême consiste donc à trouver une courbe B M, dont la sous-normale soit $= \frac{m}{n} x$; l'on aura donc $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{m}{n} x$, ou $y\,dy = \frac{m}{n} x\,dx$, $\frac{m}{n} x\,dx - y\,dy = 0$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{yy}{2} = C = aa$, ou $\frac{n}{m} y^2 = x^2 - \frac{2n}{m} aa$. Donc la courbe cherchée est une hyperbole rapportée au premier axe, & le terme $\frac{n}{m} y^2$ fait connoître que le premier axe doit être à son paramètre, comme $n : m$. Si l'on fait $m = n = 1$, l'équation $a^{m+n} = y^m x^n$ deviendra $a^2 = yx$, & l'équation ci-dessus sera $y^2 = x^2 - 2aa = xx - bb$, en prenant b moyenne proportionelle entre a & $2a$. Cette équation appartient à une hyperbole équilatere dont l'axe est $= 2b$. Donc si BMm est cette hyperbole, que A soit son centre, A B $= b$, la moitié de son axe, Bm, coupera à angles droits toutes les hyperboles du premier genre dont les équations $xy = a^2$, $xy = (a')^2$, $xy = (a'')^2$, &c. ne different entr'elles que par rapport à la puissance, & qui sont rapportées aux mêmes asymptotes perpendiculaires l'une à l'autre.

115. PROBLEME. *Trouver une courbe* B M (Fig. 13), *rapportée à des co-ordonnées perpendiculaires, dans laquelle en faisant* B A $= a$, *l'aire* A P m B *soit égale au produit de l'arc* B m *multiplié par* a. L'élément de l'arc B m est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & l'élément de l'aire A P m B est $y\,dx$; donc S. $y\,dx = a$ S. $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ou $y\,dx = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $y^2 dx^2 = aa\,dx^2 + aa\,dy^2$, $dx^2 (y^2 - aa) = aa\,dy^2$, $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(yy - aa)}}$, équation de la courbe des co-sinus hyperboliques (21).

116. PROBLEME. *Trouver la courbe dont l'aire en tournant autour de l'axe des abscisses, produit le solide* $\frac{c}{2r}$ S. $\frac{a^3 dx}{x}$.

Comparant l'élément des solides de révolution $\frac{c}{2r} y^2 dx$ avec la différentielle $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x}$ du solide proposé, l'on a $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3 dx}{x} = \frac{c}{2r} y^2 dx$, $\frac{a^3}{x} = y^2$, $a^3 = xy^2$, équation à une courbe hyperbolique.

117. PROBLEME. *Trouver une courbe* AM (Fig. 46), *rapportée aux co-ordonnées* AP $= x$, P $m = y$ *perpendiculaires l'une à l'autre telle que l'aire* A m P *soit égale au segment* AEF, *compris entre la corde* AE *& l'arc correspondant d'un demi-cercle dont le diamètre* AB $= 2a$. L'espace AFEP, selon ce qu'on a dit ci-dessus (14), est $= S. dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Le triangle APE est $= \frac{AP . EP}{2} = \frac{x . \sqrt{(2ax - xx)}}{2}$; donc le segment $AEF = S. dx . \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{x . \sqrt{(2ax - xx)}}{2}$. en différentiant, l'on aura $dx . \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} . dx \sqrt{(2ax - xx)} - \frac{1}{2} . x . \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{adx . \sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, élément du segment AEF; donc $y dx = \frac{adx . \sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, ou $y = \frac{a\sqrt{x}}{2\sqrt{(2a - x)}}$, équation d'une courbe du troisieme ordre. Cette courbe commence en A, coupe le demi-cercle au point D correspondant à une abscisse $= \frac{1}{2} a$ & s'approche continuellement de son asymptote BN. Laire A m P de cette courbe est égale au segment circulaire AEF. Ajoutant de part & d'autre l'espace AmE, l'on aura l'espace A m E F compris entre la courbe, le cercle & la ligne droite m E, égal au triangle AEP. L'espace infiniment long ADMNB renfermé entre la courbe, le diamètre AB & l'asymptote sera égal au demi-cercle ADB; donc si du demi-cercle & de cet espace l'on retranche l'espace commun ADB, l'on aura l'espace infiniment long BNMD $=$ AFED m A. Or cet espace est égal au triangle rectiligne ADG; donc BNMD est $=$ ADG.

118.

118. PROBLEME. *Sur la ſurface du quart d'un hémiſphere* A B D C (Fig. 47), *mener une ligne* A Q D, *de maniere que la lunule* A Q D A *ſoit quarrable algébriquement.* Je mène les grands cercles A Q M, A *q m* *, qui coupent la courbe en Q & *q*; je tire les perpendiculaires Q P, *q p* ſur le demi-axe A C, & des points M & *m* les perpendiculaires M N, *m n* à la ligne B C; enfin je mène O Q, parallèle à la ligne M *m*. Je fais l'arc B M = *s*, M *m* = *d s*, B N = *x*, N *n* = *d x*, A P = *z*, P *p* = *d z*, P Q = *y*, le rayon de la ſphere = *a*. Il eſt viſible que le triligne A Q *q* eſt l'élément de la lunule; mais A O Q étant un infiniment petit du premier ordre, O Q *q* ſera un infiniment petit du ſecond ordre; donc en négligeant cet infiniment petit, l'élément de la lunule ſera A O Q. Je mène les arcs infiniment proches V *u*, Z *z* parallèles **, du point V j'abaiſſe ſur A C la perpendiculaire V T & je fais A T = *t*, V T = *u*. Mais V T étant le rayon de l'arc V *u*, l'on a la proportion *a* : V T = *u* :: M *m* = *d s* : V *u* = $\frac{u\,d\,s}{a}$; & parce que V Z eſt l'élément de l'arc A V dont le ſinus verſe eſt A T = *t*, le ſinus droit étant V T = *u*, l'on a V Z : *a* : : *d t* : *u* ***, ou V Z = $\frac{a\,d\,t}{u}$; donc le rectangle V *u* Z *z* = $\frac{u\,d\,s}{a} \cdot \frac{a\,d\,t}{u} = d\,s\,d\,t$. Donc intégrant, en regardant *d s* comme conſtante (ce qui eſt très-permis), l'on aura le triligne A V *u* = *t d s*, & ſuppoſant A T = A P, ou ſuppoſant *t* = *z*, l'on aura le triligne A O Q = *z d s*. Tel eſt l'élément de la lunule.

L'élément *d s* d'un arc de cercle dont le rayon eſt = *a* & l'abſciſſe comptée du ſommet = *x*, eſt, ſelon

* Les cercles dont les plans paſſent par le centre de la ſphere ſont appellés *grands cercles de la ſphere*. Les *petits cercles* ſont ceux dont les plans ne paſſent pas par le centre de la ſphere.

** Les centres de ces arcs ſont dans la ligne A C, & les cercles auxquels ils appartiennent ſont des cercles parallèles.

*** Dans la figure 3, l'élément *i r* eſt à *i l*, différentielle du ſinus verſe A H, comme le rayon C *i* eſt au ſinus droit *i* H.

ce qu'on a dit ci-deſſus (31) $= \frac{ad'x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc l'élément AOQ $= \frac{az\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc la portion de la lunule compriſe entre l'arc circulaire AQ & l'arc A*b*Q de la courbe A*b*QD, ſera $=$ S. $\frac{az\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, & en ſuppoſant $z = a$, & $x = a$, l'on aura la lunule entiere. Ayant décrit un grand cercle quelconque AQM & mené MN perpendiculairement à BC, ſuppoſons $z = \sqrt{(2ax-xx)}$; c'eſt-à-dire, ſuppoſons MN $=$ AP, la lunule ſera $=$ S. $a\,dx = ax$, & faiſant $x = a$, la lunule entiere ſera $= aa$. C'eſt pourquoi, ſi ayant décrit un grand cercle quelconque AQM, l'on mene MN perpendiculaire à BC, & qu'on prenne AP $=$ MN, & que dans le plan de ce cercle l'on mène PQ perpendiculaire ſur AC, le point Q & tous ceux qui ſeront ſemblablement déterminés, appartiendront à la courbe cherchée, & la lunule AQDA ſera égale au quarré du rayon.

119. PROBLEME. *On demande maintenant de trouver un onglet* AHBDQA *qui ſoit quarrable algébriquement.* Je remarque que le triligne AOQ vient d'être trouvé $= z\,ds$; donc en ſuppoſant $z = AC = a$, l'on aura le triligne AM*m* $= ads$; donc MOQ*m* qui eſt l'élement de l'onglet ſera $= (a-z).ds = \frac{(a-z).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; donc en intégrant, la partie de l'onglet compriſe entre le quart de cercle AHB, les arcs de cercle BM, QM & l'arc Q*b* A ſera $=$ S. $\frac{(a-z).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Soit $z = x$, ou AP $=$ BN ; l'onglet deviendra $=$ S. $\frac{(a-x).adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ $= a\sqrt{(2ax-xx)}$, & en faiſant $x = a$, l'onglet entier ſera $= aa$.

La courbe AQD ſe conſtruit de même que dans le problême précédent ; car ayant pris un grand cercle quelconque, AQM, & mené le ſinus MN de l'arc BM, prenez AP $=$ BN, & dans le plan AQMC du grand cercle AM menez PQ perpendiculaire à AC ; le point Q

& tous les autres ainſi déterminés ſeront dans la courbe cherchée; & parce que les ſinus verſes B N, A P des arcs B M, A Q ſont égaux, les arcs le ſeront auſſi. C'eſt pourquoi prenant toujours A Q = B M, tous les points Q ſeront à la courbe.

REMARQUE. L'on peut ſouvent trouver la courbe qui réſout un problême qui peut paroître d'abord aſſez difficile ſans employer, ni le calcul différentiel, ni le calcul intégral, ainſi qu'on peut le voir en liſant la premiere partie de cet ouvrage, la ſection précédente, & par la ſolution du problême ſuivant.

120. PROBLEME. *Suppoſant un cercle a m b n* (Fig. 48), *dont la demi-circonférence ſoit* = A S = C, *l'on demande de trouver des arcs qui ſoient entre eux comme les quarrés de leurs ſinus.* Si l'on tire une ligne indéfinie A *t*, ſur laquelle en faiſant A S = C, S *ζ* = C, *ζ t* = C, & ainſi de ſuite, l'on prenne une infinité de parties dont chacune ſoit = C, qu'on faſſe l'abſciſſe A P égale à l'arc *a m* correſpondant, que par le point P on mène P M perpendiculaire à A P & égale au ſinus *p m* de l'arc *a m* & qu'on faſſe la même choſe pour chaque arc de la demi-circonférence *a m b*, la ligne A M S ſera appellée la ligne des ſinus. Si l'on fait S *g* égale à l'arc *b n*, & qu'on mène de même *g* N = D *n*, ſinus de l'arc *a m b n*, la partie S N *ζ* appartiendra auſſi à la ligne des ſinus. Mais le ſinus *g* N ſera négatif à cauſe de l'arc *ambn* > C & < 2C. Si ſur *ζ t* = C, l'on prend *ζ q* égale à l'arc *a m* = *u*; & qu'on mène R *q* = ſin. *u*, le point R appartiendra auſſi à la ligne des ſinus. On voit aiſément que les arcs *u*, C — *u*, 2 C + *u*, 3 C — *u*, 4 C + *u*, 5 C — *u*, &c. ont le même ſinus.

Cela poſé, la queſtion eſt donc réduite à trouver une courbe A M B R V qui coupe la ligne des ſinus en différens points M, *r*, R, V, &c. & qui ſoit telle que ſes abſciſſes A P, A F, &c. ſoient entre elles comme les quarrés des ordonnées P M, *r* F, &c. communes à cette courbe & à la ligne des ſinus. Si l'on fait les abſciſſes A P = *x*, l'ordonnée P M = *y*, la queſtion ſera réduite à trouver une courbe dans laquelle les *x* ſoient entre eux comme les quarrés y^2 des ordonnées; or nous ſçavons que c'eſt-là une propriété de la parabole; ainſi la courbe A M *r* B R doit être une parabole.

Si l'on ſuppoſe que AP eſt l'axe de la parabole, l'angle que fait la courbe, ou la tangente de la coube avec l'axe AP au point A, ſera droit dans la parabole; mais cet angle eſt de 45° dans la ligne des ſinus comme nous le ferons voir dans un moment. Donc au commencement la parabole tombe hors de la ligne des ſinus. Si l'on ſuppoſe que l'équation de la parabole eſt $ax = y^2$, & qu'on faſſe le paramètre fort petit, la parabole coupera la ligne des ſinus dans pluſieurs points. Si l'on fait le rayon du cercle $amb n = p$, lorſqu'on aura $y = p$, l'on aura $ax = p^2$, $x = \frac{p^2}{a}$. Si l'on prend donc $x = \frac{p^2}{a}$ & $= \frac{5C}{2}$, une des branches de la parabole recontrera la ligne des ſinus au point correſpondant à cette abſciſſe. Si l'abſciſſe $x = \frac{pp}{a}$ répond à $\frac{C}{2}$, ou à $\frac{3}{2}C$, ou à $\frac{5}{2}C$, &c., comme les ordonnées paraboliques vont toujours en augmentant, la parabole ne rencontrera plus au-delà la ligne des ſinus. Si $\frac{p^2}{a} = x$ eſt $> C$, la ligne des ſinus ſera coupée en pluſieurs points. Si l'abſciſſe $x = \frac{p^2}{a}$ eſt $= \frac{1}{2}C$, la parabole touchera la ligne des ſinus ſans la couper. Si $\frac{p^2}{a}$ eſt $> 201 . C$, la demi-parabole AR coupera la ligne des ſinus au moins en 200 points*, & alors a ſera $< \frac{pp}{201 . C}$. Donc ſi on décrit une parabole AMR avec le paramètre $a < \frac{p^2}{201 . C}$, l'on aura au moins 200 arcs qui ſeront entreux comme les quarrés de leurs ſinus. Il eſt facile de voir comment on doit déterminer a pour avoir tel nombre d'arcs que l'on voudra qui ſoient dans le rapport des quarrés de leurs ſinus.

* Si on ſuppoſe que les deux branches de la parabole ſoient décrites, il eſt facile de voir en combien de points la branche A f N doit couper la ligne des ſinus.

Nous avons dit que l'angle PAM que fait la ligne des ſinus avec la ligne AP étoit de 45°. Or c'eſt ce qui eſt évident; car ſi dans le cercle *a m b n* on prend l'arc *a m* infiniment petit, ſon ſinus *m p* ſera cenſé égal à cet arc; donc ſi AP eſt un arc infiniment petit, l'on aura AP = PM & le triangle rectangle AMP, dont l'hypoténuſe eſt l'arc AM de la courbe des ſinus ſera iſocelle, & l'angle MAP ſera de 45°, auſſi bien que l'angle PMA; donc, &c.

APPLICATION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL AUX COURBES A DOUBLE COURBURE.

121. Afin de mieux comprendre cette matiere, les commençans feront bien de relire ce que nous avons enſeigné dans la premiere partie de cet ouvrage, ſur les *ſurfaces courbes* & *les courbes à double courbure.*

122. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* AN (Fig. 49), *ſon axe* AP *des x, dont l'origine eſt* A, *l'équation de la courbe de projection ſur le plan* APM *de la baſe, & celle d'une des deux autres courbes de projection, on demande de mener à un point* N *de la courbe à double courbure la tangente* N*t*, *ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur de la ſous-tangente* M*t auſſi bien que ſa poſition.* Du point N, je mene l'ordonnée NM, & du point M où elle rencontre le plan de la baſe, ſa co-ordonnée MP, je prends le point *n* infiniment proche de N, je mène les co-ordonnées correſpondantes *n m*, *p m*, & N*h* parallèle à M*m*, auſſi bien que MH parallèle à l'axe AP. Faiſant enſuite AP = *x*, PM = *y*, MN = *z*, l'on aura P*p* = *dx*, *m*H = *dy*, *n h* = *dz* & M*m* = $\sqrt{(dy^2+dx^2)}$. Mais les triangles ſemblables *n*N*h*, NM*t*, donnent *n h* : N*h* = M*m* :: MN : M*t*, ou *dz* : $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ :: *z* : M*t* = $\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$.

Il eſt aiſé de voir que cette ſous-tangente doit être ſituée ſur MT, tangente de la courbe de projection AM, puiſque les lignes N*n*, M*m* étant dans le même plan, leurs prolongemens doivent auſſi être dans le même plan. Pour faire uſage de cette formule il faudra, par le moyen des courbes de projection, éliminer deux des

trois variables qu'elle contient, la différentielle de la variable qui reſtera ſe trouvant au numérateur & au dénominateur, la formule ſera délivrée de différentielles.

123. COROLLAIRE I. La tangente N t eſt égale à $\sqrt{((MN)^2+(Mt)^2)}=\sqrt{\left(\frac{(zz.dx^2+zzdy^2)}{dz^2}+z^2\right)}$ $\frac{z}{dz}.\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$.

124. COROLLAIRE II. Si dans le plan du triangle tMN on mène la perpendiculaire NO à la courbe à double courbure, les triangles ſemblables Nnh, NMO, donneront $Nh=\sqrt{(dx^2+dy^2)}:nh=dz::MN=z:MO=\frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, expreſſion de la ſous-normale MO; donc la normale $NO=\sqrt{(\overline{MO}^2+\overline{MN}^2)}=\sqrt{(\overline{MO}^2+z^2)}=\frac{z\sqrt{(dz^2+dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2}}$.

REMARQUE. Si l'on trouvoit la ſous-tangente négative, on la prendroit du côté oppoſé; c'eſt-à-dire, qu'on la prendroit ſur la tangente tM du côté de O, & ſi la ſous-normale étoit négative, on la prendroit du côté de A.

125. PROBLEME. *Suppoſant que les équations des courbes de projection* AM, AV, *ſur les plans* APM, RAQ, *ſont* $ax=y^2$ *&* $by=zz$, *on demande la ſous-tangente* Mt *de la courbe à double courbure* AN. La premiere équation donne $adx=2ydy$, la ſeconde donne $bdy=2zdz$; donc $dy=\frac{adx}{2y}=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, $dz=\frac{bdy}{2z}=\frac{bdy}{2\sqrt{by}}=\frac{abdx}{4\sqrt[4]{(a^3b^2x^3}}$ (en ſubſtituant la valeur de dy & celle de $y=\sqrt{ax}$); donc $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx.\sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$. Mais de plus $zz=by=b\sqrt{ax}=\sqrt{(bbax)}$; donc $z=\sqrt[4]{bbax}$. Suſtituant les va-

leurs de z, de dz, de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ dans la formule de la ſous-tangente, l'on a $\frac{z}{dz}.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 4x.\sqrt{\left(\frac{(4x+a)}{4x}\right)} = 2\sqrt{.(4xx+ax)}$; mais la ſous-tangente de la parabole AM eſt $= 2x$ & la tangente $MT = \sqrt{(4xx+y^2)} = \sqrt{(4xx+ax)}$; donc la ſous-tangente Mt de la courbe à double courbure AN, eſt double de la tangente MT.

126. PROBLEME. *Trouver la ſous-normale de la même courbe à double courbure.* NM étant une perpendiculaire abaiſſée du ſommet N de l'angle droit du triangle rectangle tNO ſur l'hypothénuſe, l'on a $Mt : MN :: MN = z = \sqrt[4]{abbx}$ (ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus 125) : $MO = \frac{zz}{Mt} = \frac{\sqrt{abb}}{2\sqrt{(4x+a)}}$. Si l'on ſuppoſe $x = o$, l'on aura $MO = \frac{b}{2}$; Si l'on fait $x = \infty$, l'on a $MO = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abb}{4\infty}} = o$; donc à l'infini la tangente de la courbe à double courbure eſt parallèle au plan de la baſe.

127. PROBLEME. *Suppoſant que* RN (Fig. 50), *eſt une courbe à double courbure, telle que la courbe de projection ſur le plan de la baſe ſoit la parabole de l'équation* $ax = y^2$ *& la courbe de projection ſur le plan* RAQ *des* y *& des* z, *le cercle de l'équation* $y^2 = aa - zz$, *trouver la valeur de la ſous-tangente de cette courbe.* En prenant la valeur de z & de dz en x & dx, celle de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, qu'on a trouvée (125) $= dx\sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$ & la valeur de $z^2 = aa - y^2 = aa - ax$ (à cauſe de $y^2 = ax$), l'on aura $z = \sqrt{(aa-ax)}$, $dz = \frac{-adx}{2\sqrt{(aa-ax)}}$, & $\frac{z}{dz}.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = 2.(a-x)\times-\sqrt{\left(\frac{4x+a}{4x}\right)}$

$= -\frac{2.(a-x).\sqrt{(4xx+ax)}}{ax} = -\frac{(a-x).\sqrt{(4xx+ax)}}{x}$;

donc on trouvera la sous-tangente demandée que j'appellerai S, en prenant une ligne $= \sqrt{(4xx+ax)}$, tangente de la parabole, supposant cette ligne $= u$, & faisant $x : u :: a-x : S$; mais on prendra S de l'autre côté de M par rapport à T à cause du signe —.

128. PROBLEME. *Trouver la sous-normale de la courbe* RN *dans la même supposition.* Si l'on appelle cette sous-normale R, & que l'on fasse la sous-tangente $S : z :: z : R$, l'on aura $R = \frac{zz}{S} = \frac{x.(aa-ax)}{-(x-a).\sqrt{(4xx+ax)}}$ $= \frac{-ax}{\sqrt{(4xx+ax)}}$, qui se réduit à $\frac{-aa}{\sqrt{5aa}} = -a\sqrt{\frac{1}{5}}$, en supposant $x = a$. La sous-normale doit être prise du côté de A, parce qu'elle est négative.

Lorsque $x = a$, l'on a $z^2 = aa - ax = 0$, & $z = 0$; donc la courbe à double courbure doit rencontrer le plan de la base au point C correspondant à $x = a$.

129. PROBLEME. *Rectifier une courbe à double courbure* AN (Fig. 49). Le triangle rectangle Nhn donne l'élément Nn (de la courbe à double courbure) $= \sqrt{((nh)^2 + (Nh)^2)}$. Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, $Nh = Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $Nn = \sqrt{(dz^2 + dx^2 + dy^2)}$. On éliminera, par le moyen des équations des courbes de projection, toutes les différentielles excepté une, & intégrant ensuite, l'on aura la valeur de l'arc AN.

130. PROBLEME. *Rectifier la courbe à double courbure, dont l'équation de la courbe de projection sur le plan de la base est* $(y^2 - 2aa)^3 = 9a^4x^2$, *l'équation de la courbe de projection sur le plan des* y *& des* z *étant* $y^2 = az$. La premiere équation donne $x = \frac{(yy-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$, $dx = \frac{y\,dy}{aa}.(y^2 - 2aa)^{\frac{1}{2}}$. La seconde équation donne $z = \frac{yy}{a}$, $dz = \frac{2y\,dy}{a}$. Substituant ces valeurs de dx & de dz

dans l'élément $\sqrt{(dz^2+dx^2+dy^2)}$, l'on a, toute réduction faite, $\frac{yydy+a^2dy}{aa}$, dont l'intégrale eſt $\frac{y^3}{3aa}+y+C$.

Pour déterminer la conſtante C, je remarque que l'arc de la courbe doit être $=o$, lorſque $x=o$; mais $x=\frac{(yy-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; donc alors $y^2=2aa$, $y=a\sqrt{2}$; donc puiſque, lorſque $x=o$, l'intégrale doit être $=o$; l'on aura $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3aa}+a\sqrt{2}+C=o$, ou $\frac{2a\sqrt{2}}{3}+a\sqrt{2}+C=o$, ou $C=-\frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Ainſi l'intégrale complette eſt $\frac{y^3}{3aa}+y-\frac{5}{3}a\sqrt{2}$. Telle ſera la valeur de l'arc de la courbe à double courbure, compris entre l'origine de la courbe & le point auquel répond l'ordonnée y.

Si l'on fait $y=o$, l'on a $x=\frac{(-2aa)^{\frac{3}{2}}}{3aa}$; mais $(-2aa)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-8a^6)}$, quantité imaginaire; donc on ne peut pas ſuppoſer $y=o$. On ne peut pas ſuppoſer non plus $z=\frac{yy}{a}=o$; ainſi l'origine de la courbe à double courbure ne ſçauroit être ſur le plan de la baſe. Mais parce que $x=o$, donne $y^2=2aa$, l'on a alors $z=\frac{2aa}{a}=2a$. Par conſéquent cette origine eſt éloignée au-deſſus du plan de baſe de la quantité $2a$.

131. PROBLEME. *Soit la courbe à double courbure* AN (Fig. 51), *dont les axes ſont* AP, AR, AQ & *deux de ſes courbes de projection* AM, & AV=PN, *on demande de trouver la valeur de l'eſpace* APN *qui eſt une partie de la ſurface*

cylindrique AVNP* *élevée sur la courbe* AV, *déterminé par la courbe à double courbure, par l'axe* AP *& la courbe* PN = AV. Je prends $Pp = dx$, je mene l'ordonnée pm & je décris la courbe pn dont le plan eſt perpendiculaire à celui de la baſe, & parallèle à ceux des courbes AV & PN. La petite ſurface $Nn\,Pp$ ſera l'élément de la ſurface cherchée. En menant NG parallèle à AP, & retranchant le petit triangle $Nn\,G$ (qui diſparoit devant $Pp\,NG$), l'élément de la ſurface cherchée ſera $Pp\,NG$. Mais cet élément eſt le produit de $Pp = dx$ par la courbe PN = AV, & les co-ordonnées de cette courbe étant y & z, l'élément de cette courbe ſera $= \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$; donc cette courbe $= S.\sqrt{(dy^2+dz^2)}$, & l'élément de la ſurface cherchée eſt $= dx.S.\sqrt{(dz^2+dy^2)}$.

Si l'on réduit cet élément à une ſeule variable, & qu'on integre, l'on aura la ſurface cherchée.

132. PROBLÈME. *En ſuppoſant que la courbe de projection* AM *ſoit une parabole dont l'équation ſoit* $y^2 = ax$, *& que la courbe de projection* AV = PN *ſoit une autre parabole, dont l'équation ſoit* $y^3 = az^2$, *on demande la valeur de la ſurface* APN *renfermée entre la courbe à double courbure, la parabole cubique* PN *& l'axe* AP. L'on aura $x = \frac{yy}{a}$ & $z = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx = \frac{2y\,dy}{a}$ & $dz = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$; donc $\sqrt{(dy^2+dz^2)} = \frac{3\,dy\sqrt{(y+\frac{4}{9}a)}}{2a^{\frac{1}{2}}}$, & $S.\sqrt{(dy^2+dz^2)} = \frac{(y+\frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, en intégrant par la regle fondamentale; donc $dx\,S.\sqrt{(dy^2+dz^2)} = \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}}}.(y+\frac{4}{9}a)^{\frac{3}{2}} = \frac{2y\,dy}{a^{\frac{1}{2}}} \times (y+\frac{4}{9}.a)^{\frac{3}{2}}$, en ſubſtituant la valeur $\frac{2y\,dy}{a}$ de dx.

* Par cylindre on entend ici un ſolide dont la groſſeur eſt uniforme dans toute ſa longueur.

Je remarque maintenant qu'en augmentant d'une unité l'exposant 1 sous-entendu de la variable y hors du signe, & le divisant ensuite par l'exposant 1 sous entendu de la variable y sous le signe, le quotient donne un nombre entier positif; ainsi (1), cette différentielle est intégrable. L'on a vu ci-dessus (1), que la différentielle $ax^{m.n+n-1}dx \times (b+gx^n)^{\frac{1}{p}}$, devenoit (en faisant $(b+gx^n)^{\frac{1}{p}} = z$) $\frac{a}{n.p.g^{m+1}} \times z^{\frac{1}{p}} dz . \left(z^{\frac{1}{p}} - b\right)^m$. Si dans cette formule on fait $= m = n = 1$ & qu'on intégre en négligeant le facteur constant, l'intégrale sera $= S.dz.(z^{\frac{2}{p}} - bz^{\frac{1}{p}}) = \frac{z^{\frac{2}{p}+1}}{\frac{2}{p}+1} - \frac{b}{\frac{1}{p}+1}.z^{\frac{1}{p}+1}$. Mais si dans la différentielle $ax^{m.n+n-1} \times dx (b+gx^n)^{\frac{1}{p}}$, l'on change x en y, dx en dy, qu'on fasse $b = \frac{4}{9}a$, $g = 1$, & qu'on change le facteur constant a en $\frac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$, p en $\frac{3}{2}$, que l'on multiplie l'intégrale que l'on vient de trouver par le facteur constant qu'on a eu ci-dessus (1), ou par $\frac{a}{n.p.g^{m+1}}$, qui parce que a est ici représenté par $\frac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$, p par $\frac{3}{2}$, que $n = 1$, & $g = 1$, sera $\frac{4}{3a^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura, à cause de $z = (y + \frac{4}{9}.a)^{\frac{3}{2}}$, l'on aura, dis-je, toute réduction faite, l'intégrale cherchée $= \frac{4}{7a^{\frac{1}{2}}}(y - \frac{8}{45}.a).(y + \frac{4}{9}a)^{\frac{5}{2}}$. Pour sçavoir si cette intégrale est complette, je remarque qu'elle doit être $= 0$, lorsque $y = 0$; mais alors elle devient $= -\frac{1024.aa}{76545}$. donc la constante qu'il faut ajouter est $= +\frac{1024.aa}{76545}$.

& l'intégrale complette est $\frac{4}{7a^{\frac{1}{2}}}\cdot(y-\frac{2}{45}).a.(y+\frac{4}{9}a)^{\frac{5}{2}}+\frac{1024.aa}{76545}$. Telle est la valeur de la surface APN.

133. PROBLEME. *Trouver la surface cylindrique* AVNP. Cette surface étant le produit de AP par l'arc PN, sera $=xS\sqrt{(dy^2+dz^2)}$.

COROLLAIRE. Si Au est une demi-cicloïde dont le diamètre du cercle générateur soit a, Au sera $=2a$ & la surface cylindrique Aunp sera $=2.ax$. Si $x=a$, cette surface sera $2.aa$, ou double du quarré du diamètre du cercle générateur.

134. PROBLEME. *Trouver l'espace* AVN *compris entre la courbe à double courbure* AN, *la courbe de projection* AV, *& la ligne* VN *parallèle à* AP. Si de la surface cylindrique APNV, on retranche la surface ANP, l'on aura la surface cherchée $=xS.\sqrt{(dy^2+dz^2)}-dx\,S.\sqrt{(dy^2+dz^2)}$.

135. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* AN *avec ses axes & ses équations, trouver le solide* APMN *déterminé par le plan* MNP, *la base* APM *& les surfaces courbes* APN & AMN. Le petit solide MPpmnN, compris entre les deux plans PMN & pmn, étant l'élément du solide cherché, il s'agit de trouver son expression. Pour cela, je remarque que cet élément est un prisme dont la base est le plan PMN & la hauteur Pp. Or l'élément du plan PMN est $=z\,dy$; car lorsque l'ordonnée de la courbe est y & l'abscisse x, l'élément de l'aire de la courbe est $y\,dx$; donc lorsque l'ordonnée MN est z & que l'abscisse PM est y, l'élément de l'aire doit être $=z\,dy$; donc la base de notre solide élémentaire sera $=S.z\,dy$, le solide élémentaire sera $=dx\,S.z\,dy$ & le solide cherché sera $S.dx.S.z\,dy$. Pour pouvoir intégrer, on réduira, par le moyen de la courbe PN, la valeur de $S.z\,dy$ en z & ensuite en x ou d'abord en y & ensuite en x, par le moyen de l'équation de la courbe AM afin que l'élément ne contienne qu'une seule variable x, ou bien, on tâchera d'exprimer l'élément par une seule variable z, par exemple, & sa différentielle dz, en éliminant dx & dy.

136. PROBLEME. *Supposant que la courbe de projection sur le plan de la base est la parabole de l'équation* $ax=y^2$, &

la courbe de projection sur le plan des y & des z la parabole de l'équation $zz = by$, *on demande le solide* AMNP. L'on aura $z = \sqrt{by}$; donc l'élément $dx . S.z\,dy$, sera $= dx . S.dy\sqrt{by}$, ou $dx . S.dy\sqrt{(b\sqrt{ax})}$, parce que $y = ax$. Mais de l'équation $y = \sqrt{ax}$, l'on tire $dy = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}.\frac{a\,dx}{\sqrt{ax}}$; donc en substituant l'on aura $dx . S.dy\sqrt{by} = \frac{1}{2}dx . a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}S.x^{-\frac{1}{4}}dx$ *. Or $S.x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$; donc l'élément sera $\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.a^{\frac{3}{4}} \times b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{4}}dx$, dont l'intégrale est $\frac{8}{21}.a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{7}{4}}$, valeur du solide proposé. Si l'on veut l'exprimer en y, on substituera la valeur de x prise de l'équation $y^2 = ax$ & si l'on substitue ensuite la valeur de y en z, on l'exprimera par une fonction de z.

137. PROBLEME. *Trouver la valeur du prisme* AVNMP, *compris entre les plans* AVQ & PMN. Si l'on multiplie l'aire PMN par $AP = x$, le solide cherché sera $= x . S.z\,dy$.

COROLLAIRE I. Si la courbe $AV = PN$ est une parabole dont z soit l'ordonnée & y l'abscisse, l'aire PMN sera $= \frac{2}{3}zy$ & le prisme demandé sera $= \frac{2}{3}xzy$.

138. COROLLAIRE II. Si du prisme $x . S.z\,dy$, l'on retranche le solide AMNP, l'on aura le solide $AVMN = x\,S.z\,dy - S.dx\,S.z\,dy$. C'est l'expression du solide qui manque au solide AMNP pour égaler le prisme APMNV.

139. PROBLEME. *Étant donnée la courbe à double courbure* AN (Fig. 52) *& ses courbes de projection sur le plan de la base & sur celui des y & des z, trouver le solide* AMNVQ, *en supposant que l'on ne connoît ni le prisme*

* On doit faire attention que $\sqrt{(b.\sqrt{ax})} = \sqrt{(\sqrt{.bbax})} = \sqrt[4]{bbax} = b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}$, & que $\sqrt{ax} = \sqrt[4]{aaxx} = a^{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}$.

APMNVQ, *ni le solide* APMN. Je mene le plan *u n m q* parallèle au plan VNMQ & infiniment proche de ce dernier plan; l'élément du solide cherché sera $V u n N M m Q q$. Si l'on fait passer les plans $V f g N$, $N L g K M$ par les lignes VN, NM, ces plans retrancheront les petits solides $V u f g L N$, $n L N M K m$ qui sont inassignables respectivement au prisme $V f g N M K q Q$ qu'on peut regarder comme l'élément du solide demandé. Pour avoir l'expression de cet élément, je multiplie $Q q$ par le rectangle $V N M Q = x . z$. Mais $Q q = dy$; donc cet élément est $= x z dy$.

COROLLAIRE. Donc le solide $APMN = x . S. z dy = S. x z dy$. Autre expression différente de celle qu'on a trouvée ci-dessus (135), pour le même solide.

140. PROBLEME. *Supposant que la courbe* AM (*qui est la courbe de projection de la courbe à double courbure sur le plan de la base*) *est la parabole de l'équation* $a x = y^2$, *& que la courbe* AV *de projection sur le plan des y & des z est l'hyperbole équilatère dont l'équation est* $z y = a a$, *l'on demande le solide* AMNVQ. L'équation $a x = y^2$ donne $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} . \frac{a dx}{\sqrt{a x}}$. L'équation $z y = a^2$ donne $z = \frac{a^2}{y} = \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{a x}}$. Substituant les valeurs de z & de dy, qu'on vient de trouver dans $x z dy$, l'élément du solide demandé sera $= x . \frac{a^2}{\sqrt{a x}} . \frac{1}{2} . \frac{a dx}{\sqrt{a x}} = \frac{1}{2} x . \frac{a^3 dx}{a x} = \frac{1}{2} . a^2 dx$, dont l'intégrale $\frac{1}{2} . a^2 . x$ est la valeur du solide cherché. Si dans cette intégrale l'on substitue à la place de x sa valeur $\frac{y^2}{a}$ prise de l'équation $a x = y^2$, l'on aura $\frac{1}{2} a y^2$ pour la valeur du solide cherché.

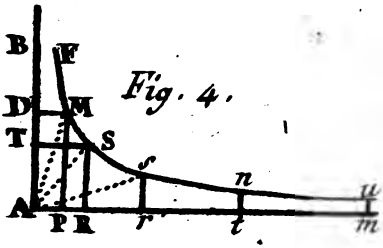


Fig. 4.

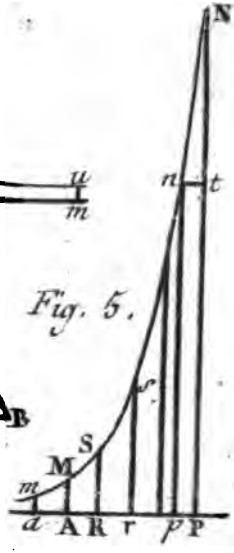
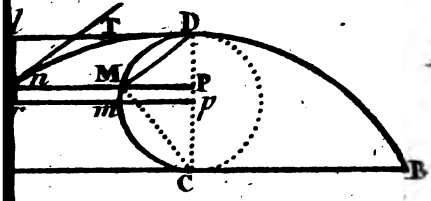


Fig. 5.



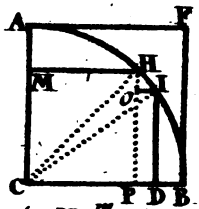


Fig. 10.

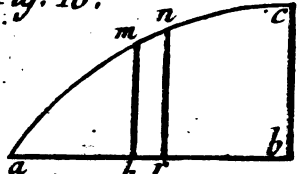
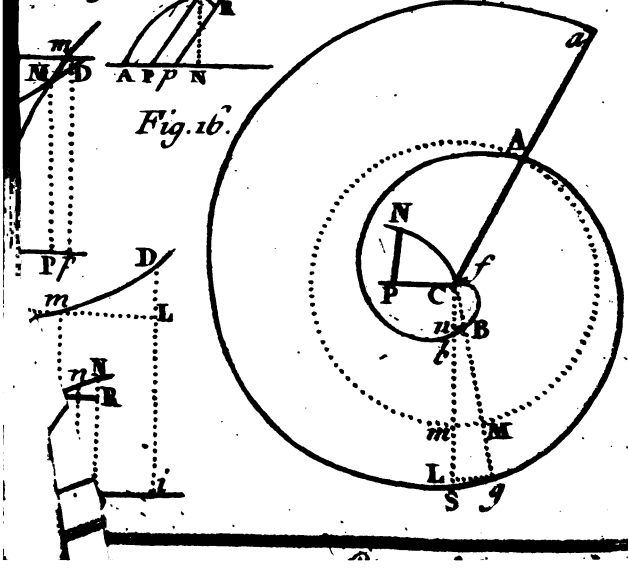
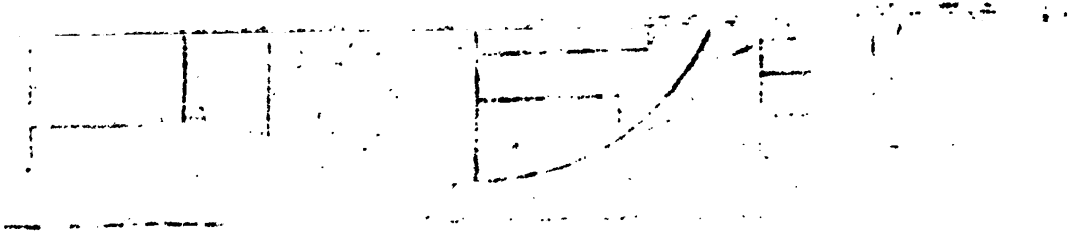


Fig. 14.

Fig. 16.





7.19.

Fig. 20.

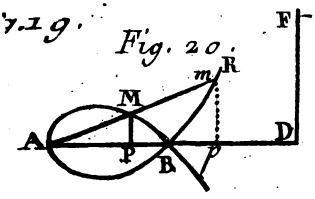


Fig. 22.

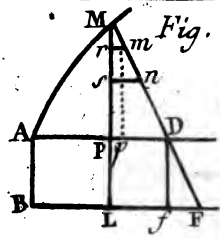


Fig. 21.

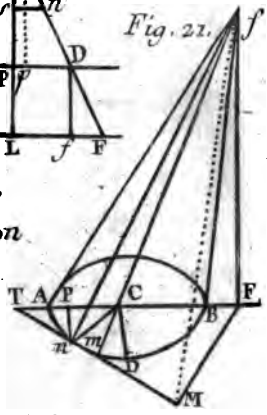


Fig. 26.

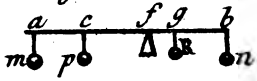
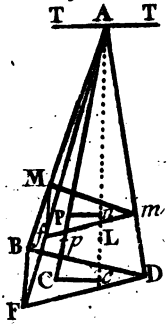


Fig. 31.



30.

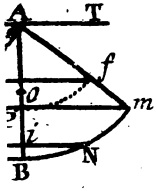


Fig. 33.

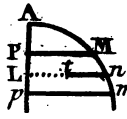
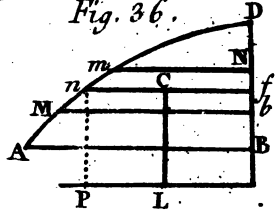


Fig. 36.



35.

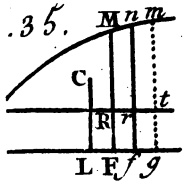


Fig. 38.

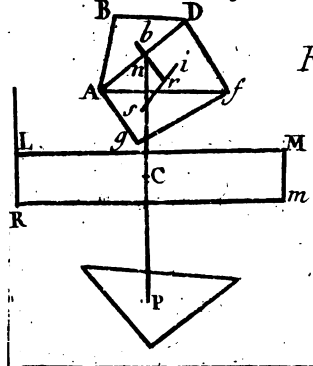
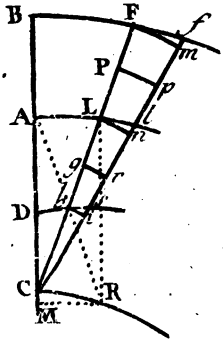


Fig. 40.



Ricquet Sculp.

Fig. 44.

Fig. 45.

Fig. 49.

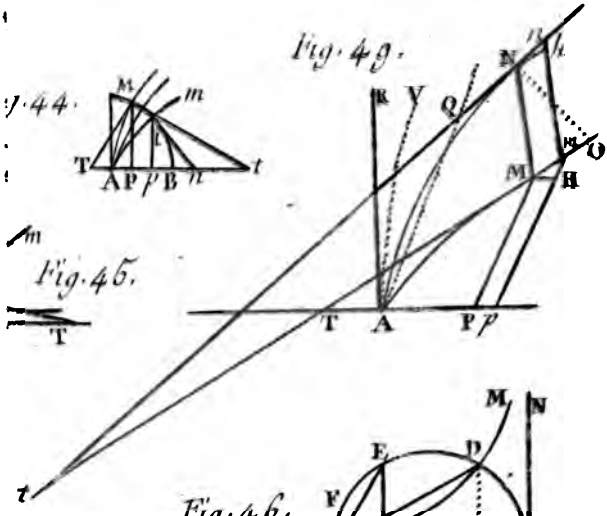
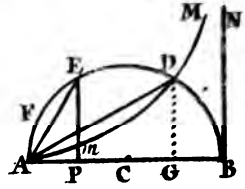
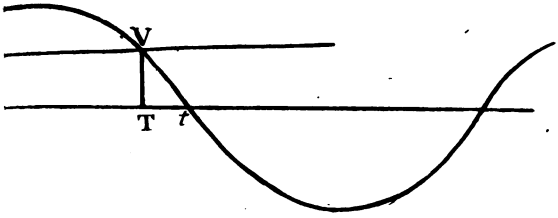


Fig. 46.





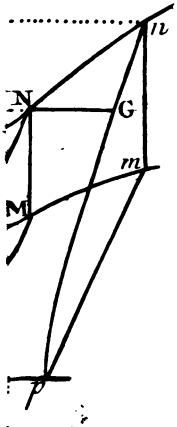
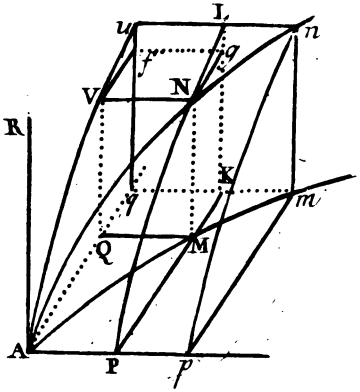
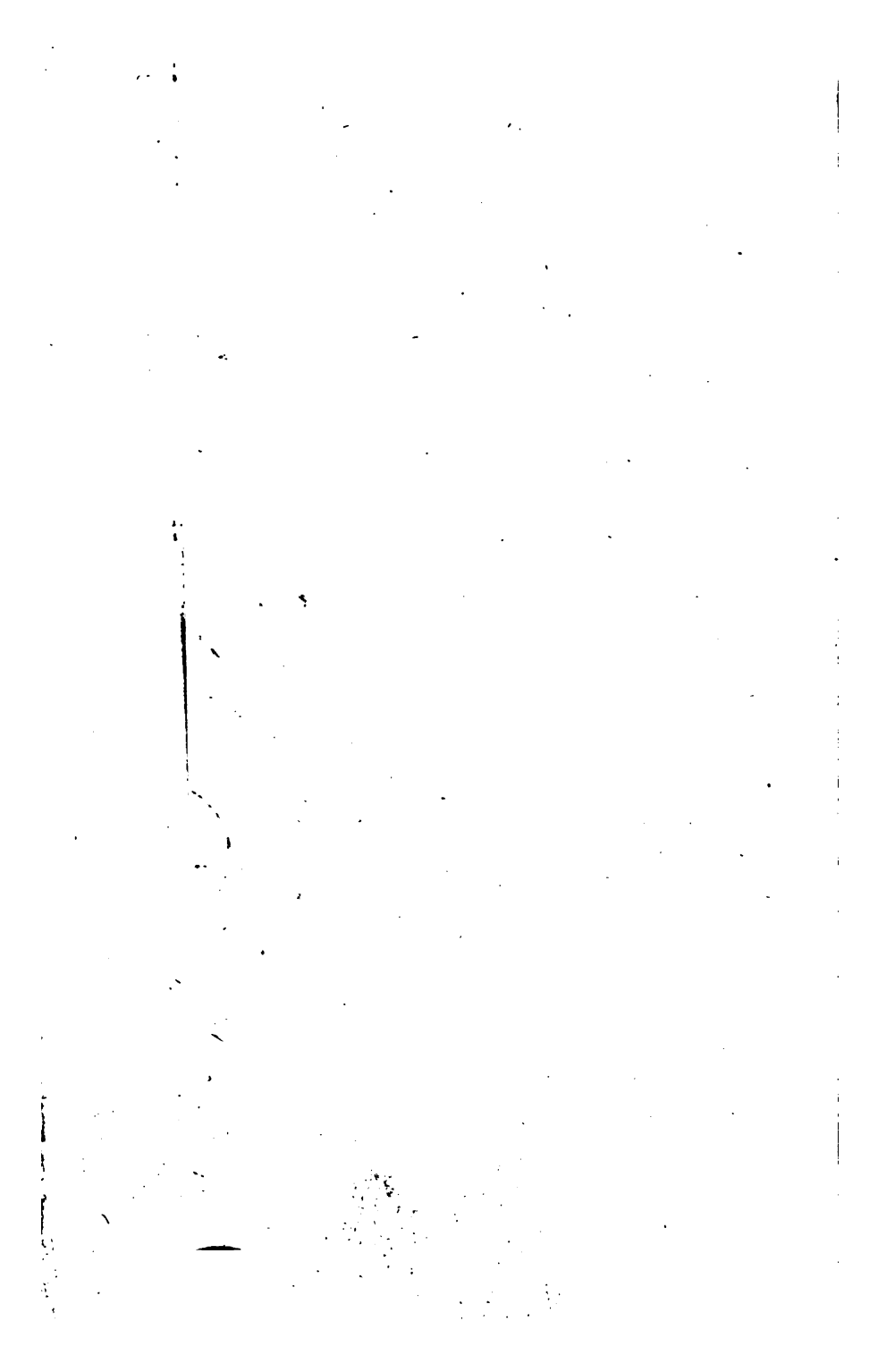


Fig. 52.



Picquet Sculp.



SECTION III.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES ET DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

NOUS diviserons cette Section en deux parties. Dans la premiere nous traiterons de l'intégration des formules & des équations différentielles à une & à plusieurs variables. Nous parlerons dans la seconde de quelques méthodes d'intégrer peu connues, du calcul des variations & de ses applications.

PREMIERE PARTIE.

DE LA TROISIÈME SECTION.

1. NOUS parlerons d'abord de l'intégration des différentielles à une seule variable, & de celles qui ne contiennent qu'une seule variable dans chacun de leurs termes. Nous passerons ensuite aux différentielles à plusieurs variables. Mais avant d'entrer en matiere, nous remarquerons que, selon ce qu'on a dit dans la section précédente (1), l'intégrale de $mx^{m-1}dx$, ou S. $mx^{m-1}dx$ est $= x^m$, S. $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{y}{x}$, S. $\frac{dx}{x} = \text{L}.x$, S. $(y\,dx + x\,dy) = xy$. L'on a vu aussi dans

l'endroit cité, que l'on pouvoit trouver l'intégrale d'une différentielle binome $a x^m dx (b + g x^n)^p$ toutes les fois que p eſt un nombre entier poſitif. De même toute différentielle de cette forme $a x^m dx (b + g x^n + f x^r + h x^i + \&c.)^p$, ſera intégrable algébriquement ou par logarithmes, toutes les fois que p ſera un nombre entier poſitif, & que le polinome qui eſt ſous le ſigne ne contiendra qu'un nombre fini de termes; car alors on n'aura à intégrer que des quantités de la forme $Bx^R dx$, dont l'intégrale eſt $\frac{B}{R+1} . x^{R+1}$. Mais ſi $R = -1$, l'intégrale de $Bx^R dx$ ſera $= BL.x$. L'on a vu auſſi dans le même endroit, que l'on peut intégrer toute différentielle binome telle que l'expoſant de la variable hors du ſigne augmenté d'une unité étant diviſé par l'expoſant de la variable ſous le ſigne donnera pour quotient un nombre entier poſitif. Il en ſera de même ſi la différentielle binome ne ſe trouvant pas dans ce cas peut (ſans changer de valeur) y être ramenée, en changeant l'expoſant de la quantité ſous le ſigne de poſitif en négatif, ou réciproquement. Ce ſera la même choſe ſi en multipliant hors du ſigne & diviſant ſous le ſigne, ou ſi en diviſant hors du ſigne & multipliant ſous le ſigne, la différentielle peut, ſans changer de valeur, être ramenée à cette forme $a x^{m \cdot n + n - 1} dx . (b + g x^n)^p$, ou à celle-ci $ax^{m \cdot n - 1} dx (b + g x^n)^p$, m étant un nombre entier poſitif ou 0 dans le premier cas, & un nombre entier poſitif dans le ſecond: car en augmentant d'une unité l'expoſant de la quantité hors du ſigne, l'on a dans le premier cas $m . n + n$, qui eſt diviſible par n,

&

& donne pour quotient $m + 1$. Dans le second cas, diviſant $m . n$ par n, l'on a m pour quotient. Donc dans l'un & l'autre cas les quotients ſeront des nombres entiers poſitifs. On peut auſſi voir facilement qu'on integre par la regle fondamentale, toute formule dont la quantité hors du ſigne (ce ſigne peut indiquer une racine ou une puiſſance) eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne, exactément, ou même à un multiplicateur conſtant près, ce qui peut avoir lieu toutes les fois que la différentielle eſt de cette forme $a x^{m-1} dx$, ou peut y être ramené. La différentielle $xdx . (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ eſt dans ce cas, parce que $x dx$ eſt la différentielle de la quantité ſous le ſigne, à un multiplicateur conſtant près qui eſt 2, & ſon intégrale eſt $\frac{2}{3} . \frac{x dx (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{2 x dx} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$. Quand pour abréger nous n'ajouterons point de conſtante, on devra toujours en ſuppoſer une.

2. L'on peut préparer la formule $dx \times \sqrt{(a^3 + 3a^2 x + 3a x^2 + x^3)}$ en prenant la racine du facteur $a^2 + 2ax + x^2$ & écrivant la différentielle de cette manière $(a dx + x dx) \times \sqrt{(a + x)} = dx . (a + x)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{5} (a + x)^{\frac{5}{2}}$. Mais pour préparer la formule $(3ax^3 dx + 4x^4 dx) . \sqrt{(ax + xx)}$, il faut diviſer hors du ſigne par x, & multiplier la quantité ſous le ſigne par x^2; c'eſt-à-dire, par x élevé à l'expoſant du ſigne, parce que x^2 ſous le ſigne eſt la même choſe que x hors du ſigne. L'on aura

donc $(3ax^2dx + 4x^3dx) \times \sqrt{(ax^3 + x^4)}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, eſt $\frac{2}{3} \cdot (ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$. Quelquefois une formule différentielle peut être préparée en multipliant ou en diviſant le numérateur & le dénominateur par une même quantité. La fraction $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(3a^2 + 2x)}}$, devient, en multipliant le numérateur & le dénominateur par x, $\frac{axdx + xxdx}{\sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}}$, dont l'intégrale $= \frac{2}{3}\sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}$, comme il eſt aiſé de le voir, en différentiant cette intégrale.

Pour préparer la formule $\frac{dx \cdot (a + x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2a^2x + 3ax^2 + x^3)}}$, je diviſe le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{(a+x)}$, & j'ai $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = (adx + xdx) \times (2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale, par la règle fondamentale, eſt $= (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2ax + xx)}$.

Il eſt ſouvent utile d'ajouter à une formule différentielle & d'en retrancher en même tems une même fonction intégrable. Soit la formule $xdx \cdot (a + x)^m$, & ſuppoſons qu'on ne ſache pas comment il faut s'y prendre pour l'intégrer. En ajoutant & retranchant $adx \cdot (a + x)^m$, dont nous connoiſſons l'intégrale, il vient $xdx \times (a + x)^m + adx \cdot (a + x)^m - adx \cdot (a + x)^m$,

dont l'intégrale est $\frac{(a+x)^{m+2}}{m+2} - \frac{a.(a+x)^{m+1}}{m+1}$ $= (A)\left(\frac{a+x}{m+2} - \frac{a}{m+1}\right).(a+x^{m+1} = \left(\frac{(m+1).x-a}{(m+2)\ (m+1)}\right).(a+x^{m+1})$. En effet en différentiant l'intégrale A, l'on a $\frac{dx}{m+2}.(a+x)^{m+1}$ $+ (m+1).\left(\frac{a+x}{m+2} - \frac{a}{m+1}\right).(a+x)^m dx$. Mais $(a+x)^{m+1} = (a+x).(a+x)^m = a.(a+x)^m + x.(a+x)^m$; donc notre différentielle devient $\frac{dx}{m+2}.a.(a+x)^m +$ $\frac{x\,dx.(a+x)^m}{m+2} + \frac{m+1}{m+2}dx.a(a+x)^m$ $+ \frac{m+1}{m+2}.x.dx.(a+x)^m - \frac{m+1}{m+1} \times$ $a.(a+x)^m dx = \frac{m+1+1}{m+2}.x\,dx \times$ $(a+x)^m + \frac{m+1+1}{m+2}.a\,dx.(a+x)^m$ $- \frac{m+1}{m+1}.a.dx.(a+x)^m = x\,dx.(a+x)^m$ $+ a\,dx.(a+x)^m - a\,dx.(a+x)^m =$ $x\,dx.(a+x)^m$.

3. Il est souvent utile de partager une formule différentielle en deux parties pour la comparer à la formule $x\,dy + y\,dx$, dont l'intégrale est $= xy$. Qu'on propose, par exemple, la formule $-\frac{a^2\,dx}{xx\sqrt{(a^2-x^2)}}$, je la dispose ainsi

$\frac{(-aa+xx-xx).dx}{x^2\sqrt{(aa-xx)}}$; Je partage celle-ci de cette manière $-\frac{dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^2}-\frac{x\,dx}{x\sqrt{(aa-xx)}}$ (ces fractions étant réduites au même dénominateur rendront la formule dont elles ſont les parties), ou $\sqrt{(aa-xx)}.d\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\times d.\sqrt{(aa-xx)}$ (la lettre d indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité qui eſt à ſa droite), dont l'intégrale ſera $\frac{1}{x}\sqrt{(aa-xx)}$, quantité dont la différentielle eſt $\sqrt{(aa-xx)}.d\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}d\sqrt{(aa-xx)}$. Si on ſuppoſe $x=\sqrt{(aa-xx)}$, & $y=\frac{1}{x}$, dans la formule ci-deſſus $xdy+ydx$, on verra aiſément que $\sqrt{(aa-xx)}\times d\left(\frac{1}{x}\right)$ eſt $=xdy$, & que $\frac{1}{x}d\sqrt{(aa-xx)}=y\,dx$, & parce que yx eſt l'intégrale de $x\,dy+y\,dx$, notre intégrale ſera $\frac{1}{x}\sqrt{(aa-xx)}$.

4. Pour avoir l'intégrale d'une formule différentielle, il faut quelquefois élever des binomes ou des polinomes à des puiſſances. Par exemple, pour avoir l'intégrale de la formule $x^{\frac{1}{3}}dx\,(a-x)^2$, j'élève $a-x$ au quarré, & je multiplie tous les termes de ce quarré par $x^{\frac{1}{3}}dx$, ce qui donne $a^2x^{\frac{1}{3}}dx-2ax^{\frac{4}{3}}dx+x^{\frac{7}{3}}dx$. Prenant main-

tenant l'intégrale de chaque terme, j'ai $\frac{3}{4} a^2 x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7} a x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}}$.

5. Il faut quelquefois employer les substitutions pour changer une formule dont on ne connoit pas l'intégrale en une autre qu'on sache intégrer. On peut aussi quelquefois, par le moyen des substitutions changer une formule irrationnelle en rationnelle & intégrer ensuite facilement, comme nous le ferons voir par plusieurs exemples.

Soit la formule $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{(2ax+xx)}.\sqrt{\left(a+\sqrt{(2ax+xx)}\right)}}$.

Pour la réduire à une forme plus simple, je suppose $\sqrt{(2ax+xx)} = z$; donc $(2ax+xx) = z^2$, $2a\,dx + 2x\,dx = 2z\,dz$, $a\,dx + x\,dx = z\,dz$; donc en substituant z & $z\,dz$ à la place des quantités qu'elles représentent, la formule proposée deviendra $= \frac{z\,dz}{z\sqrt{(a+z)}} = \frac{dz}{\sqrt{(a+z)}} = dz.(a+z)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est $2(a+z)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a+z)} = 2\sqrt{\left(a+\sqrt{(2ax+xx)}\right)}$.

Soit la formule $\frac{-a\,a\,dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$, que j'écris ainsi $\frac{aa}{x} \times \frac{-x\,dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$. Parce que $\frac{-x\,dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable algébriquement, je fais son intégrale $\frac{1}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{z}{aa}$; ainsi $\frac{-x\,dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dz}{aa}$, & la formule proposée devient $\frac{dz}{x}$. Pour trouver x, j'élève au quarré la formule de substitution, &

j'ai $\frac{1}{xx-aa} = \frac{\zeta^2}{a^4}$, ou $\frac{a^4}{\zeta^2} = xx - aa$, ou $xx = aa + \frac{a^4}{\zeta^2} = \frac{aa\zeta^2 + a^4}{\zeta^2}$, $x = \frac{a}{\zeta}\sqrt{(\zeta^2 + aa)}$. Substituant cette valeur de x dans $\frac{d\zeta}{x}$, la formule proposée sera $= \frac{\zeta d\zeta}{a\sqrt{(aa+\zeta\zeta)}}$, dont l'intégrale est $= \frac{1}{a}.(aa+\zeta\zeta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(aa+\zeta\zeta)}}{a}$ $= \frac{x}{\sqrt{(xx-aa)}}$ *. Il n'y a aucune règle pour connoître quelle substitution on doit employer dans tous les cas pour changer une formule différentielle qui ne paroit pas intégrable en une autre qu'on puisse facilement intégrer : l'usage & l'industrie du calculateur doivent suppléer aux règles.

Soit la formule $\frac{dx}{x\sqrt{(ax-xx)}}$. Pour que cette formule soit rationnelle, il faut que $\sqrt{(ax-xx)}$ soit un quarré. Je fais $ax - xx = \frac{a^2x^2}{\zeta^2}$, ce qui donne $x = \frac{a\zeta^2}{a^2+\zeta^2}$; donc $\sqrt{(ax-xx)} = \frac{ax}{\zeta} = \frac{a^2\zeta}{a^2+\zeta^2}$, $dx = \frac{2a^3\zeta d\zeta}{(aa+\zeta\zeta)^2}$, & faisant les substitutions, la formule proposée devient

* Lorsque pour abréger l'on n'ajoute point de constante, le lecteur doit y suppléer; à l'égard de sa détermination, elle dépend, dans chaque cas particulier, de la nature du Problême qui a donné cette intégrale.

$= \frac{2\,dz}{zz}$, dont l'intégrale eſt $= -\frac{2}{z}$. Mais $z = \frac{ax}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$. Donc l'intégrale de la formule propoſée ſera $= \frac{-2\sqrt{(a-x)}}{a\sqrt{x}}$.

6. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale de la formule* $\left(x + \sqrt{(1+xx)}\right)^n dx$. Je fais $x+\sqrt{(1+xx)} = z$; donc $x = \frac{zz-1}{2z}$, $dx = \frac{dz(zz+1)}{2zz}$; ainſi la formule propoſée devient $= \frac{1}{2} z^{n-2} . dz \times (zz+1) = \frac{1}{2} z^n dz + \frac{1}{2} z^{n-2} dz$ (A), dont l'intégrale eſt $= \frac{z^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{z^{n-1}}{2(n-1)} + C$. Si on avoit eu $n = 1$, ou $n = -1$, l'un ou l'autre terme de la différentielle A auroit eu un expoſant $= -1$; ainſi l'on auroit intégré ce terme par les logarithmes.

7. THÉORÊME. *Toute différentielle* $dx \times (a + bx^n + cx^m + gx^l + \&c.)^p$, p *étant un nombre entier, & les expoſans de* x *dans les termes particuliers étant tous fractionnaires, ou en partie entiers & en partie fractionnaires, peut toujours être rendue rationnelle.*

Suppoſons que n & m ſoient ſeulement fractionnaires, l étant entier, & que n ſoit $= \frac{r}{i}$, fraction irréductible, $m = \frac{t}{u}$ autre fraction irréductible, je cherche un nombre entier h qui ſoit diviſible exactement par i & par u, & je ſuppoſe $x = z^h$: donc $dx = h z^{h-1} dz$; par conſéquent en ſubſtituant z^h au

lieu de x & $hz^{h-1}dz$, au lieu de dx, la différentielle du théorême sera $hz^{h-1}dz \times (a + bz^{\frac{rh}{i}} + cz^{\frac{rh}{u}} + gz^{hl})^p$; or h étant divisible par i & par u, le second & le troisième termes seront affectés d'exposants entiers. Donc la formule substituée sera rationnelle. Si l avoit été un exposant fractionnaire $= \frac{v}{s}$, on auroit pris pour h un nombre entier divisible à la fois par i, u & s, & ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre d'exposans fractionnaires.

8. PROBLÊME. *Intégrer la différentielle* $\frac{dy\sqrt{y} + b\,dy}{y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}}}$. Je change $\sqrt{y}$ en $y^{\frac{1}{2}}$, & je réduis les exposans $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{2}$ au même dénominateur, ce qui donne $\frac{4}{6}$ & $\frac{3}{6}$. Donc la formule proposée devient $\frac{dy.y^{\frac{3}{6}} + b\,dy}{y^{\frac{4}{6}} + y^{\frac{3}{6}}}$. Je suppose $y = z^6$ (6 est divisible par 3 & par 2) ; donc $dy = 6z^5\,dz$, & la formule proposée devient $\frac{6z^8dz + 6bz^5dz}{z^4 + z^3} = \frac{6z^5dz + 6bz^2dz}{z + 1}$. Je partage cette dernière formule de cette manière $\frac{6dz.z^5}{z+1} + \frac{6bdz.z^2}{z+1}$. Je divise z^5 par $z + 1$. Je trouve d'abord (en prenant z pour le premier terme du diviseur) z^4 pour quotient ; multipliant le diviseur par le quotient, & retranchant le produit du dividende z^5, il reste $-z^4$, que je divise de même pour avoir $-z^3$ au quotient. Retranchant

encore le produit du diviseur par le quotient, j'ai $+ z^3$ pour reste, je continue la division jusqu'à ce que le reste soit 1, & divisant ce reste par $z + 1$, le quotient sera (A) $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 + \frac{1}{z+1}$. De même $\frac{z^2}{z+1} = z - 1 + \frac{1}{z+1}$ (B). Multipliant tous les termes du quotient A, par $6\,dz$, & intégrant, l'on aura $\frac{6}{5} z^5 - \frac{6}{4} z^4 + \frac{6}{3} z^3 - \frac{6}{2} z^2 + 6z + 6.L.(z+1)$. Multipliant tout de même les termes du quotient B par $6\,b\,dz$, & intégrant, l'on a $\frac{6bz^2}{2} - 6bz + 6\,b\,L.(z+1)$ *; joignant ensemble cette suite de termes l'on aura l'intégrale totale. Si l'on veut l'exprimer en y, l'on substituera la valeur de z en y.

Soit la différentielle $y^m\,dy\,(b + gy^n)^p$. Pour savoir dans quel cas cette formule est exactement intégrable, je fais $(b + g\,y^n)^p = z^r$, r étant indéterminée; donc $b + g\,y^n = z^{\frac{r}{p}}$, $y^n = \frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}$, $y = \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{1}{n}}$, $y^m = \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{m}{n}}$, $dy = \frac{r}{npg} z^{\frac{r}{p} - 1}\,dz \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{1}{n} - 1}$; donc la formule proposée devient $= \frac{r}{npg} z^{\frac{r}{p} + r - 1} dz \times \left(\frac{z^{\frac{r}{p}} - b}{g}\right)^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1}$, qui est intégrable lorsque $\frac{m}{n} + \frac{n}{1} = 1$

* L désigne le logarithme hyperbolique.

$= \frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier positif, ou 0. Si $\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier négatif, la formule sera rationnelle en supposant $r = p$. Si $p = \frac{u}{2}$, u étant un nombre impair positif ou négatif, & $\frac{m+1}{n} = u$. La formule pourra être rendue rationnelle, en suivant la méthode du théorême précédent.

9. PROBLEME. *Dans quel cas peut-on rendre rationnelle la formule* $x^{m-1} dx (a + b x^n)^{\frac{u}{v}}$, u & v étant des nombres entiers. Si $v = 1$, il est visible que la formule sera rationelle, pourvu que m & n soient rationnelles, mais si $\frac{u}{v}$ est une fraction irréductible, il faut employer une double substitution. Qu'on fasse $a + b x^n = z^v$; donc $(a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = z^u$, $x^n = \frac{z^v - a}{b}$; ainsi $x^m = \left(\frac{z^v - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, & $x^{m-1} dx (a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{v}{bn} z^{v+u-1} dz \times \left(\frac{z^v - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$, ce qui fait voir que toutes les fois que $\frac{m-n}{n} = \frac{m}{n} - 1$, ou $\frac{m}{n}$ seront des nombres entiers, cette formule sera rationnelle. Supposons en second lieu que $a + b x^n = x^n z^v$, ce qui donne $x^n = \frac{a}{z^v - b}$, $(a + b x^n)^{\frac{u}{v}} = \frac{a^{\frac{u}{v}} z^u}{(z^v - b)^{\frac{u}{v}}}$, $x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^v - b)^{\frac{m}{n}}}$;

donc $x^{m-1}dx = \frac{-\nu a^{\frac{m}{n}} z^{\nu-1} dz}{n(z^{\nu}-b)^{\frac{m}{n}+1}}$; donc la formule proposée se change en celle-ci $\frac{-\nu a^{\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}} z^{u+\nu-1} dz}{n(z^{\nu}-b)^{\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}+1}}$ qui sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}$, sera un nombre entier.

Ainsi l'on peut rendre rationnelle la différentielle proposée toutes les fois que $\frac{m}{n}$ & $\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}$, sont des nombres entiers.

10. Si l'on a une formule différentielle $X\,dx$, X étant une fonction de x qui ne contienne que des fonctions fractionnaires $(e+fx)^{\frac{m}{n}}$, $(e+fx)^{\frac{u}{\nu}}$, &c. du binome $e+fx$, on la rendra rationnelle en supposant $e+fx=z$: car par cette substitution, l'on a $x=\frac{z-e}{f}$, $dx=\frac{dz}{f}$, $(e+fx)^{\frac{m}{n}}=z^{\frac{m}{n}}$, $(e+fx)^{\frac{u}{\nu}}=z^{\frac{u}{\nu}}$.

Donc si $X=\left((e+fx)^{\frac{m}{n}}+(e+fx)^{\frac{u}{\nu}}+\&c.\right)^{p}$, p étant un nombre entier, l'on aura $X=(z^{\frac{m}{n}}+z^{\frac{u}{\nu}}+\&c.)^{p}$, qu'on rendra rationnelle par la méthode ci-dessus (7). Si les binomes étoient multipliés les uns par les autres, & qu'il n'y en eût que deux, l'on auroit $X=z^{\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}}=z^{s}$, en faisant $\frac{m}{n}+\frac{u}{\nu}=s$, & la formule proposée seroit $=\frac{1}{f}\cdot z^{s}\,dz$, qui est intégrable algébriquement toutes les fois que s n'est

pas $=-1$. Si s étoit $=-1$, ſon intégrale ſeroit $\frac{1}{f}.L.z$.

Si outre les fonctions fractionnaires dont on vient de parler X, contenoient encore des fonctions rationnelles de x, il eſt aiſé de voir qu'on pourroit la rendre rationnelle par la même méthode. De même ſi X ne contenoit que des fonctions rationnelles de x, & des puiſſances fractionnaires $\left(\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{m}{n}} \pm \left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{q}{v}} \pm \&c.\right)^{p}$ De la quantité $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)$, combinées enſemble par addition, ou par ſouſtraction, on rendroit la formule rationnelle en faiſant $\frac{e+fx}{a+bx}=z$: car on auroit $x=\frac{az-e}{f-bz}$, $dx=\frac{adz(f-bz)+bdz(az-e)}{(f-bz)^2}$. En ſuppoſant pour plus de ſimplicité, que X ne contienne que les formules $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{m}{n}}$ & $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{q}{v}}$, p étant toujours un nombre entier, la formule deviendra $\left(z^{\frac{m}{n}} \pm z^{\frac{q}{v}}\right)^{p} \times \frac{adz(f-bz)+bdz(az-e)}{(f-bz)^2}$; donc on pourra la rendre rationnelle par la méthode ci-deſſus (7) : car en prenant un nombre h qui ſoit exactement diviſible par n & v, & faiſant $z=y^h$, h étant le nombre dont on vient de parler, la formule différentielle qu'on vient de trouver ſera changée en une autre qui ſera rationnelle, ou qui ne contiendra aucun expoſant fractionnaire.

Si on vouloit intégrer une fraction radicale de la forme $\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{((a+bx^n)^m)}}$, m & n étant poſitifs & entiers, on feroit $a+bx^n=\frac{a}{1-bz}$, pour avoir $x^n=\frac{az}{1-bz}$.

ou $x = \left(\frac{az}{1-bz}\right)^{\frac{1}{n}}$, & $dx = \frac{a\,dz\,(1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n\,(az)^{\frac{n-1}{n}}}$;

donc $S.\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{\left((a+bx^n)^m\right)}} = S.\frac{(az)^{\frac{m-1}{n}}\,a\,dz\,(1-bz)^{\frac{-n-1}{n}}}{n(1-bz)^{\frac{m-1}{n}}\,(az)^{\frac{n-1}{n}}\,a^{\frac{m}{n}}\,(1-bz)^{\frac{m}{n}}}$

$= S.\frac{a\,dz\,(az)^{\frac{m-n}{n}}\,(1-bz)^{-1}}{n\,a^{\frac{m}{n}}} = S.\frac{z^{\frac{m-n}{n}}\,dz}{1-bz}$. On fera

enſuite $z = t^n$, pour avoir $z^{\frac{m}{n}} = t^m$, & $\frac{m}{n}z^{\frac{m-n}{n}}\,dz =$

$m\,t^{m-1}\,dt$; donc $S.\frac{z^{\frac{m-n}{n}}\,dz}{1-bz} = S.\frac{m\,t^{m-1}\,dt}{1-bt^n}$; mais

$\frac{m\,t^{m-1}\,dt}{1-bt^n}$, eſt une fraction rationelle qu'on pourra intégrer facilement, ou par les ſéries, ou par la méthode des fractions rationnelles dont nous parlerons dans la ſuite.

DE L'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

11. Lorſque par la ſubſtitution, l'on ne pourra pas parvenir à donner à une formule différentielle une forme ſous laquelle elle paroiſſe intégrable, algébriquement, ou par les logarithmes, on pourra avoir recours aux ſéries.

Soit la différentielle $\frac{b^3\,dx}{b^3-x^3}$, qu'on ne peut

intégrer algébriquement. Je fais $\frac{b^3 dx}{b^3 - x^3} = b^3 dx . (b^3 - x^3)^{-1}$. J'élève $b^3 - x^3$ à la puiſſance -1 par la formule du binome de Newton, en ſuppoſant dans la formule $(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b +$ &c., $a = b^3$ & $b = -x^3$, $m = -1$, & j'ai, en multipliant enſuite tous les termes par $b^3 dx$, la ſérie $dx + \frac{x^3 dx}{b^3} + \frac{x^6 dx}{b^6} + \frac{x^9 dx}{b^9}$ &c. ; donc l'intégrale de la formule propoſée ſera $= x + \frac{x^4}{4b^3} + \frac{x^7}{7b^6} + \frac{x^{10}}{10b^9}$ &c, ſérie convergente, en ſuppoſant $b > x$. Si $x > b$, on réduira $(-x^3 + b^3)^{-1}$ en ſérie en prenant x^3 pour le premier terme. Pour cela on changera la formule propoſée en $\frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = -b^3 dx . (x^3 - b^3)^{-1}$, & l'on aura x^3 pour le premier terme du binome qu'on veut élever à la puiſſance -1 ; l'on multipliera enſuite tous les termes par $-b^3 dx$, & l'on aura en intégrant, S. $\frac{-b^3 dx}{x^3 - b^3} = \frac{b^3}{2x^2} + \frac{b^6}{5x^5} + \frac{b^9}{8x^8} + \frac{b^{12}}{11x^{11}}$ &c.

12. Au lieu de ſe ſervir du binome de Newton pour trouver les ſéries, l'on peut employer une méthode élégante dont ſe ſervent pluſieurs analyſtes pour intégrer les formules différentielles, voici en quoi elle conſiſte. On diviſe la formule propoſée

en deux facteurs, dont l'un contienne la différentielle & soit intégrable, & dont l'autre contienne la variable finie ; on intégre le premier facteur comme si l'autre étoit constant, & l'on différentie ensuite le résultat, ce qui donne la différentielle proposée avec une autre formule qui vient de la différentiation de l'autre facteur. Si l'on ajoute cette derniere formule à la proposée, & qu'on l'en retranche en même tems, l'on aura une formule qui en contient trois & dont les deux premieres sont absolument intégrables. Si la troisième a de l'affinité avec la proposée, & qu'on puisse la traiter par la même méthode, on la changera en trois formules, dont les deux premieres seront intégrables, & dont la troisième pourra être traitée de même, & ainsi successivement, l'on formera la série cherchée. Mais il sera plus élégant de prendre une formule générale, qui étant différentiée donne deux formules qui aient de l'affinité ; car par ce moyen, en déterminant les coëfficiens indéterminés, l'on a une série plus simple.

13. Soit la formule $\frac{dx}{a^3+x^3}$ qu'on veut réduire en série. En regardant $\frac{1}{a^3+x^3}$ comme un facteur constant, & intégrant l'on a $\frac{x}{a^3+x^3}$. Je différencie maintenant cette formule que j'écris ainsi $x \times \frac{1}{a^3+x^3}$, & j'ai $\left(\frac{dx}{a^3+x^3} - \frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2}\right)$. Si j'integre, j'aurai $\frac{x}{a^3+x^3}$; donc si je distribue

la formule proposée de la maniere suivante $\frac{dx}{a^3+x^3} - \frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$, * les deux premiers termes donneront une intégrale algébrique. La troisième formule est semblable à la formule proposée & n'en differe que par les exposans, puisque celui de x dans le numérateur est augmenté de trois unités (car $dx = x^0 dx$), tandis que l'exposant du dénominateur ($a^3 + x^3$) est augmenté d'une unité ; c'est pourquoi j'intègre en supposant $\frac{1}{(a^3+x^3)^2}$ constant, ou ce qui revient au même, en supposant le facteur $\frac{1}{a^3+x^3}$ constant, comme la premiere fois, ce qui donne $\frac{3x^4}{4.(a^3+x^3)^2}$. Différentiant cette intégrale (qui n'est pas la véritable), il vient $\frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} - \frac{2.3^2.x^6dx}{4(a^3+x^3)^3}$; ainsi il faut disposer la 3e formule de cette maniere $\frac{3x^3dx}{(a^3+x^3)^2} - \frac{2.3^2x^6dx}{4(a^3+x^3)^3} + \frac{2.3^2x^6dx}{4(a^3+x^3)^3}$. Les deux premieres formules prises ensemble ont une intégrale algébrique, & la troisième peut être traitée par la même méthode ; ainsi en répétant les opérations on trouvera la série cherchée.

* La seconde formule a le signe —, & la troisième le signe + ; parce que pour ajouter à b la quantité $-a$, & pour l'en retrancher en même tems, on peut écrire $b - a + a$.

14. Mais pour avoir la série d'une manière plus élégante, je me sers de la formule générale $\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}$, dont je prends la différentielle de cette manière : $d\left(\frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q}\right)^* = \frac{(3p+1).x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} - \frac{3qx^{3p+3}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}}$; donc $S.\frac{x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^q} = \frac{1}{3p+1} \times \frac{x^{3p+1}}{(a^3+x^3)^q} + \frac{3q}{3p+1} \times S.\frac{x^{3p}dx}{(a^3+x^3)^{q+1}}$. (A).

Cela posé, je suppose $p=0$ & $q=1$ (pour avoir $x^{3p}dx = x^0dx = dx$), & j'ai $S.\frac{dx}{(a^3+x^3)} = \frac{x}{a^3+x^3} + 3S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$ (B); (car $q+1=2$). Je fais ensuite $p=1$ & $q=2$, & par la formule (A), j'ai $S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{4}.\frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3.2}{4}S.\frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3}$. Supposez ensuite $p=2$ & $q=3$, la formule A donnera $S.\frac{x^6dx}{(a^3+x^3)^3} = \frac{1}{7}.\frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} + \frac{3.3}{7}.S.\frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4}$. Si on fait $p=3$ & $q=4$, l'on aura $S.\frac{x^9dx}{(a^3+x^3)^4} = \frac{1}{10} \times \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3.4}{10}S.\frac{x^{12}dx}{(a^3+x^3)^5}$, & ainsi de suite, l'on pourra continuer tant qu'on voudra.

Enfin dans la première substitution B écrivez au lieu de $S.\frac{x^3dx}{(a^3+x^3)^2}$, sa valeur donnée par la seconde substi-

* La lettre *d* indique qu'il faut prendre la différentielle de la quantité renfermée dans la parenthèse.

tution, & enſuite à la place de S. $\frac{x^6 dx}{(a^3+x^3)^3}$, ſa valeur que donne la troiſième ſubſtitution, & ainſi de ſuite & l'on aura S. $\frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{x}{a^3+x^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3^2.2}{4.7}\cdot\frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} + \frac{3^3.2.3}{4.7.10}\cdot\frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3^4.2.3.4}{4.7.10.13}\times\frac{x^{13}}{(a^3+x^3)^5}$ &c.

USAGE DES QUADRATURES ET DES RECTIFICATIONS DES COURBES DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

15. Il n'y a aucune formule différentielle qu'on ne puiſſe conſtruire par la quadrature ſuppoſée d'une courbe. Soit une formule $B\,dx$, dans laquelle B ſoit une fonction de x, qu'on la réduiſe à une dimenſion linéaire, en la multipliant s'il le faut, ou en la diviſant par des conſtantes, ſi B eſt une puiſſance 3e, par exemple, on la diviſera par a^2. La formule étant ainſi préparée, ſuppoſons B linéaire & $= y$ & décrivons la courbe dont les co-ordonnées ſont x, & $y = B$. Si F M (Fig. 1ere.) eſt la courbe demandée, en faiſant A P $= x$, P M $= y = B$, l'on aura l'élément de cette courbe $= y\,dx = B\,dx$. Donc S. $B\,dx$ ſera égale à l'aire A F P M. Donc on aura l'intégrale par le moyen de cette aire.

Si l'on demande l'intégrale S. $B\,dx$ pour le cas de $x = a$, l'on prendra A P $= a$, & l'aire A F M P donnera l'intégrale cherchée.

Soit ſuppoſée $B = \sqrt{(2ax - xx)}$, la différentielle $B\,dx$ ſera $= dx\sqrt{(2ax - xx)}$. Comme B

eſt ici linéaire, on ne fera aucune multiplication ni aucune diviſion, ſuppoſez $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, & décrivez la courbe de cette dernière équation, qui ſera un demi-cercle AMD (Fig. 2), dont le diamètre $= 2a$; donc S. $B\,dx$ = S. $y\,dx$ = S. $dx . \sqrt{(2ax - xx)}$ eſt égal au ſegment AMP, AP étant x, & PM $= y$. Si la formule avoit été $a\,dx . \sqrt{(2ax - xx)}$, on l'auroit diviſée par a; mais on auroit enſuite multiplié l'intégrale par a; de ſorte que l'intégrale auroit été égale au produit de a par le ſegment APM.

Soit la formule $B\,dx = dx . \sqrt{(2ax + xx)}$; ayant décrit une hyperbole équilatère AM (Fig. 3), dont le demi-axe CA $= a$, l'eſpace AMP ſera = S. $dx . \sqrt{(2ax + xx)}$.

16. Soit la formule $\frac{dx . x^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, qu'on multipliera par a, pour avoir $\frac{a\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$; faites $\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = B = y$ & décrivez la courbe de cette équation, cette courbe eſt du troiſième ordre. Suppoſons que AM (Fig. 4) ſoit cette courbe dans laquelle AP $= x$ & PM $= y$, l'on aura l'eſpace APM = S. $\frac{a\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, & S. $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{\text{APM}}{a}$. Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{a^2+x^2}$, on la multiplieroit par a^2, & l'on auroit $\frac{a^2\,dx}{a^2+x^2}$. Suppoſez $y = \frac{a^2}{a^2+x^2}$ & décrivez la courbe BM

(Fig. 5) de cette équation. Dans cette courbe AP $= x$ & PM $= y$, l'eſpace ABPM ſera $= S.\frac{a^3 dx}{a^2+x^2}$; donc $S.\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{ABMP}{a^3}$.

Soit la formule $\frac{aa\,dx}{b+x}$, l'on aura l'intégrale $S.\frac{aa\,dx}{b+x}$, par le moyen d'une hyperbole entre ſes aſſymptotes. Voyez la ſection précédente (8).

Soit la formule $\frac{dx}{bb+x^2}$. Je multiplie cette formule par b^3 pour avoir $\frac{b^3 dx}{b^2+x^2} = b^3.(b^2+x^2)^{-1}$. Or, ſection précédente (14), $\frac{dx}{2}.a^3(a^2+x^2)^{-1}$; eſt l'élément d'un ſecteur de cercle, dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$. Donc ſi l'on fait AC (Fig. 2) $= b$, A$b = x$, le ſecteur CAM ſera $= \frac{1}{2} S.\frac{b^3 dx}{b^2+x^2}$; mais $S.\frac{dx}{b^2+x^2}$ eſt $= \frac{2.CAM}{b^3}$.

Si l'on avoit la formule $\frac{dx}{g+x^2}$, en faiſant $g = a^2$ (ce qui peut ſe faire en ſuppoſant qu'on ait multiplié g par 1 afin qu'il devienne a^2, pour avoir $1 : a :: a : g = \frac{aa}{1} = a^2$), l'on auroit la formule $\frac{dx}{aa+xx}$, qu'on multiplieroit par $\frac{a^3}{2}$ afin d'avoir $\frac{a^3 dx}{2.(a^2+x^2)}$, dont l'intégrale eſt un ſecteur de cercle, dont la tangente $= x$ & le rayon $= a$.

Si l'on avoit la formule $x^{\frac{3}{2}} . (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$, on la conſtruiroit par le moyen d'une ciſſoïde. Voyez la ſection précédente (16).

La formule $x^x dx$ ſe conſtruit par le moyen d'une courbe exponentielle dont l'ordonnée $y = x^x$. Voyez la ſection précédente (17).

La formule $\frac{v y dv}{\sqrt{(yy+aa)}}$ dépend de la quadrature de l'hyperbole; il en eſt de même de la formule $\frac{v y dy}{\sqrt{yy-aa)}}$. Mais la formule $\frac{y y dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$ dépend de la quadrature du cercle. Voyez la ſection précédente (21).

17. Il n'eſt pas néceſſaire pour intégrer de conſtruire la courbe dont l'abſciſſe eſt x, il ſera même ſouvent utile de choiſir un facteur différentiel qui ſoit intégrable algébriquement, & de faire ſon intérable $= z$, z étant l'abſciſſe de la courbe qu'on doit décrire, en faiſant l'autre facteur $= y$, y étant l'ordonnée de la même courbe. Ainſi dans la formule $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$, dont on a parlé ci-deſſus (16), ayant fait la multiplication par $\frac{a}{a}$ pour avoir $\frac{adx.\sqrt{x}}{2.\sqrt{(a-)}} = \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{ax}}{2.\sqrt{(a-x)}}$, je fais $\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{(a-x)}} = dz$; & en intégrant & ajoutant une conſtante arbitraire, j'ai $C-\sqrt{a}.\sqrt{(a-x)} = z$, & en faiſant $C=a$, je trouve $a-\sqrt{(aa-ax)} = z$, $a-z = \sqrt{(aa-ax)}$, ou $\frac{(a-z)^2}{a} = a-x$. Faites maintenant $\sqrt{ax} = y$, ou $ax = y^2$, ou $x = \frac{y^2}{a}$, & l'équation de la courbe dont l'abſciſſe eſt z & l'ordonnée y

ſera $\frac{(a-z)}{a} = a - \frac{y^2}{a} = \frac{aa-y^2}{a}$, ou $(a-z)^2 = aa - yy$, ou $aa - 2az + z^2 = aa - yy$, ou $2az - z^2 = y^2$. C'eſt pourquoi ſi avec le rayon C A $= a$ je décris un cercle A M B D (Fig 2), dans lequel on faſſe A P $= z = a - \sqrt{(aa - ax)}$ & l'ordonnée P M $= y = \sqrt{(ax)}$, l'on aura S. $\frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} =$ A M P. Donc S. $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{2 \cdot \text{A M P}}{a}$. L'intégrale de la formule $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ dépendant de la quadrature du cercle, la quadrature de la courbe A M (Fig. 4), par le moyen de laquelle on a conſtruit la même formule dépendra auſſi de la quadrature du cercle & l'eſpace infiniment long A B H D, ſera égal au double d'un quart de cercle dont le rayon $= a$.

Soit la formule $-\frac{dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$, je la multiplie par a^3 pour rendre linéaire le multiplicateur de dx, & je prends enſuite le facteur $\frac{-a\,a\,dx}{x^2}$, dont l'intégrale algébrique eſt $\frac{a^2}{x}$, que je fais $= z$; donc $x = \frac{a^2}{z}$. Je fais enſuite $\frac{a}{x}\sqrt{(aa-xx)} = y$. Pour décrire la courbe des co-ordonnées z & y, il faut déterminer ſa nature; pour cela je ſubſtitue dans la derniere équation la valeur de x donnée par l'avant-dernière, & j'ai $\frac{z}{a}\sqrt{\left(aa - \frac{a^4}{zz}\right)} = \sqrt{(zz - aa)} = y$, équation à l'hyperbole équilatère. C'eſt pourquoi avec le demi-axe C A $= a$, je décris l'hyperbole équilatère A M (Fig. 3), je prends ſur le premier axe l'abſciſſe C P $= z = \frac{aa}{x}$ & ayant mené l'ordonnée P M, j'ai l'eſpace A P M $=$ S. $\frac{-a^3\,dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$

& S. $\frac{-dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3} = \frac{APM}{a^3}$. Ainsi pour chaque valeur de x l'on pourra connoître la valeur de z, & celle de S. $\frac{-dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^3}$.

18. Il sera quelquefois plus élégant de construire par les quadratures, non la formule proposée, mais une autre formule, qui étant ajoutée à la première, donnera une formule différentielle algébrique, de l'intégrale de laquelle retranchant l'intégrale de la formule ajoutée, il restera l'intégrale de la proposée.

Pour faire comprendre cet artifice, soit la formule proposée $y\,dx$; intégrez comme si y étoit constant & vous aurez yx; prenez la différentielle de cette intégrale & vous trouverez $d(yx) = x\,dy + y\,dx$. Ainsi $x\,dy$ est la formule qu'on ajoutera à la proposée. Donc $yx =$ S. $x\,dy +$ S. $y\,dx$, & $yx -$ S. $x\,dy =$ S. $y\,dx$; Donc si par les quadratures vous trouvez S. $x\,dy$, & que vous retranchiez cette quantité de yx, vous aurez l'intégrale de la formule proposée.

Soit la formule $\frac{-x^4\,dx}{(x^2+aa)^{\frac{3}{2}}}$ que vous pourrez disposer ainsi $x^3\,\frac{-x\,dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$; intégrant maintenant comme si x^3 étoit constant, l'on a $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$; la différentielle de celle-ci est $d\left(\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}\right)$ ou $\frac{-x^4\,dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$

donc $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}} =$ S. $\frac{-x^4\,dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}} + 3$ S. $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$,

ou $\frac{x^3}{xx+aa)^{\frac{3}{2}}} - 3$. S. $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(xx+aa)}} =$ S. $\frac{-x^4\,dx}{(xx+aa)^{\frac{3}{2}}}$,

Intégrons par les quadratures la formule $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$.

Pour cela je suppose $\frac{x\,dx}{\sqrt{(xx+aa)}} = dz$, afin d'avoir $\sqrt{(xx+aa)} = z$, & $x = \sqrt{(zz-aa)}$. Faites $x = y$ & décrivez la courbe des co-ordonnées x & y (dont l'équation est $zz - aa = xx = yy$, qui appartient à l'hyperbole équilatère). Avec le demi-axe $CA = a$, ayant décrit l'hyperbole équilatère AM (Fig 3), prenez $CP = z = \sqrt{(xx+aa)}$, & ayant mené l'ordonnée PM, vous aurez S. $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(xx+aa)}}$ = APM. Donc si on retranche le triple de cet espace de l'intégrale algébrique $\frac{x^3}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura l'intégrale de la formule proposée $\frac{-x^4 dx}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$.

Parlons maintenant de la construction des formules différentielles par le moyen des rectifications.

19. La méthode de construire les formules différentielles par la rectification des courbes paroît préférable à la construction par les quadratures; car si l'on décrit la courbe A m (Fig. 4), dont l'arc AM est supposé égal à l'intégrale d'une différentielle proposée, en enveloppant cet arc avec un fil, l'on aura facilement la longueur de cet arc, & par conséquent la valeur de l'intégrale cherchée.

Si l'on a la différentielle $p\,dx$, dans laquelle p est une fonction algébrique de x, que nous supposerons réduite à une dimension linéaire (ce qu'on peut toujours obtenir en multipliant ou en

diviſant par une conſtante), il s'agit de réduire cette formule différentielle en une autre qui exprime l'élément d'un arc d'une courbe algébrique. Suppoſons que les co-ordonnées perpendiculaires de la courbe cherchée ſont y & u, l'élément de l'arc de la courbe ſera $= \sqrt{(dy^2 + du^2)}$; donc l'on doit avoir $p\,dx = \sqrt{(dy^2 + du^2)}$ & $pp\,dx^2 = dy^2 + du^2$. Cette équation fait voir que la formule $p^2\,dx^2$ doit être partagée en deux parties dont les racines quarrées ſoient réelles & intégrables algébriquement & dont l'une ſoit $= dy$ & l'autre $= du$; leurs intégrales y & u ſeront les co-ordonnées de la courbe cherchée.

20. Soit la formule $p\,dx = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a} dx$; donc $p = \frac{\sqrt{(4xx + aa)}}{a}$; $p^2 dx^2 = \frac{4x^2 dx^2}{aa}$ $+ dx^2 = dy^2 + du^2$. Faiſant $\frac{4x^2 dx^2}{aa} = dy^2$, & $dx^2 = du^2$, l'on a $\frac{2x\,dx}{a} = dy$, & $dx = du$. Donc en intégrant, $\frac{x^2}{a} = y$, & $x = u$. Par conſéquent $\frac{uu}{a} = y$, ou $uu = ay$, équation à une parabole, dont le paramètre $= a$; donc S. $\frac{dx \cdot \sqrt{(4xx + aa)}}{a}$ s'obtient par la rectification d'un arc de parabole. Soit A M (Fig. 6) une parabole dont le paramètre $= a$, l'abſciſſe A P $= y$, l'ordonnée P M $= u$, l'équation de cette parabole ſera $u^2 = ay$,

& parce qu'on a trouvé $u = x$ & $\frac{x^2}{a} = y$, ſi l'on prend l'abſciſſe A P $= \frac{x^2}{a}$ ou $= \frac{uu}{a}$, l'on aura pour chaque valeur de x l'intégrale de la différentielle propoſée. Si, par exemple, on fait $x = a$, & qu'on faſſe $y =$ AP $= \frac{x^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, l'intégrale correſpondante à $x = a$, dépendra de la rectification de l'arc A M.

Soit la formule $\frac{dx\sqrt{(m^2x^{2m-2} + a^{2m-2})}}{a^{m-1}}$ qu'on veut réduire à la rectification d'une courbe algébrique. J'élève au quarré le multiplicateur de dx, pour avoir $\frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}} + 1$. Je diviſe cette quantité en deux parties $\frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}}$ & 1, dont je prends les racines quarrées $\frac{mx^{m-1}}{a^{m-1}}$ & 1. Multipliant les racines par dx, j'ai les formules $\frac{mx^{m-1}dx}{a^{m-1}}$ & dx, qui ſont toutes les deux intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration l'on a $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ & x; ſi je fais la première $= u$ & la ſeconde $= y$, il viendra $x = y$ & $\frac{x^m}{a^{m-1}} = u$, ou $\frac{y^m}{a^{m-1}} = u$, ou $y^m = a^{m-1}u$, équation qui appartient aux paraboles, ou aux hyperboles de tous les genres, ſelon que m eſt un nombre poſitif ou négatif, on ſuppoſe que m n'eſt pas $= +1$, autrement cette équation ſeroit à la ligne droite.

Ainſi la formule propoſée s'intègre par un arc de ces courbes.

Soit la formule $pdx = dx\left(\frac{x}{a} + \frac{b}{a} + \frac{x^3}{aac}\right)^{\frac{1}{2}}$; élevant au quarré le multiplicateur de dx & le partageant en deux quarrés $\frac{x}{a} + \frac{b}{a}$, $\frac{x^3}{a^2c}$ *; multipliant leurs racines (qui ſont toutes les deux réelles) par dx, l'on a $dx\,\frac{\sqrt{(x+b)}}{\sqrt{a}}$, $\frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{a\sqrt{c}}$, qui étant intégrées & égalées, la première à u & la ſeconde à y, donneront $\frac{2}{3}\cdot\frac{(x+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} = u$, $\frac{2\,x^{\frac{5}{2}}}{5\,a\sqrt{c}} = y$. Ainſi l'intégrale de la formule propoſée ſera égale à un arc de la courbe des coordonnées u & y.

21. Il eſt quelquefois à propos d'ajouter au quarré de la formule propoſée & d'en retrancher en même tems une autre différentielle afin de réduire plus facilement la formule à la rectification d'une courbe algébrique.

Soit la formule $\frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$; l'ayant élevée au

* Rien n'empêche de conſidérer ces quantités comme des quarrés, quoiqu'on n'en puiſſe pas extraire des racines algébriques.

quarré, j'ajoute & je retranche $\frac{(ax-xx).dx^2}{ax-xx}$, pour avoir $\frac{(\frac{1}{4}a^2-ax+x^2+ax-x^2)}{ax-xx}dx^2$. Je partage maintenant cette formule, comme on le voit ici $\frac{(\frac{1}{2}a-x)^2dx^2}{ax-xx}$, dx^2, dont les racines ſont $\frac{(\frac{1}{2}a-x)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, & dx, toutes les deux réelles & intégrables algébriquement. Ayant fait l'intégration, il vient $\sqrt{(ax-xx)}$, & x. En faiſant $\sqrt{(ax-xx)}=y$, & $x=u$, on trouvera $\sqrt{(au-uu)}=y$, ou $au-uu=y^2$, équation au cercle; donc l'intégrale de la formule propoſée, s'obtient par un arc de cercle. Lorſque $u=x$ eſt plus grand que a, la différentielle propoſée eſt imaginaire, auſſi bien que ſon intégrale.

22. Il arrive rarement que l'intégrale de la formule $p\,dx$ ſoit égale à un arc d'une courbe algébrique; mais cette intégrale eſt très-ſouvent égale à un arc de courbe algébrique, en ajoutant ou retranchant une quantité algébrique. Ainſi il eſt permis d'ajouter à la formule $p\,dx$ une formule différentielle $q\,dx$ intégrable algébriquement. Pour déterminer la différentielle qu'on doit ajouter à la formule propoſée pour qu'il en réſulte une formule dont on puiſſe diſtribuer le quarré en deux parties, dont les racines ſoient réelles & algébriquement intégrables, nous établirons le théoréme ſuivant.

23. THEOREME. *Si ayant ſuppoſé* $dx=s\,dp$ (*s ne déſigne point l'intégrale de* dp), *on décrit la courbe des co-ordonnées* $s.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$, $s.(p-p^3)-x$, *l'arc de cette courbe, que j'appellerai* L, *ſera* $=s.(1-pp)-S.p\,dx$. Qu'on prenne les différentielles des co-ordon-

nées, l'on aura $ds.(1-pp)^{\frac{3}{2}} - 3s.pdp.(1-pp)^{\frac{1}{2}}$, $ds.(p-p^3)+sdp-3ppdp=dx$. En ſubſtituant dx au lieu de sdp, ces différentielles ſe réduiſent facilement aux ſuivantes $(1-pp)^{\frac{1}{2}}.(ds(1-pp)-3pdx)$, $p(ds(1-pp)-3pdx)$. Si l'on prend la ſomme des quarrés de ces différentielles, l'on trouve $(ds(1-pp)-3pdx)^2$, dont la racine $ds(1-pp)-3pdx$, ſera l'élément de l'arc L ou ſera $=dL$. Ajoutant & retranchant la quantité différentielle $sd(1-pp)$, l'on a $ds.(1-pp)+sd(1-pp)+2spdp-3pdx=dL$. Je ſubſtitue $2dx$ au lieu de $2sdp$, pour avoir $ds(1-pp)+sd(1-pp)-pdx=dL$; donc en intégrant l'on a $s(1-pp)-Spdx=L$, ce qu'il falloit démontrer; donc $Spdx=L-s(1-pp)$; ainſi l'intégrale de la différentielle pdx eſt égale à l'arc L, moins la quantité $s(1-pp)$. On doit remarquer que l'on peut prendre poſitivement ou négativement les co-ordonnées; car il en réſultera toujours le même quarré, puiſque le quarré d'une quantité négative eſt toujours poſitif. Ainſi la ſomme des quarrés des différentielles des co-ordonnées ſera toujours le même & $=(dL)^2$. De même lorſqu'on prend la racine dL, il eſt incertain ſi cette racine doit avoir le ſigne $+$ ou le ſigne $-$; c'eſt pourquoi il ſera à propos de donner à l'arc L le double ſigne $\pm$ & de déterminer enſuite lequel des deux doit avoir lieu. On doit ſe ſouvenir de ne pas omettre d'ajouter une conſtante.

Soit la formule $\frac{adx}{x}$ qu'on veut réduire à la rectification d'un arc d'une courbe algébrique. En comparant nous avons $p=\frac{a}{x}$; donc $dp=\frac{-adx}{xx}$, & $s=\frac{dx}{dp}=-\frac{x^2}{a}$, $1-pp=1-\frac{aa}{xx}=\frac{xx-aa}{xx}$, $s.(1-pp)=-\frac{1}{a}(xx-aa)$. Les co-ordonnées de la courbe

cherchée ſont donc $-\left(\frac{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}{ax}\right)$, $\frac{-2xx+aa}{x}$, ou (en prenant les co-ordonnées avec des ſignes contraires) $\frac{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}{ax}$, $\frac{2xx-aa}{x}$; donc par le théorême l'on aura $-\frac{1}{a}(xx-aa) \mp L = S.\frac{adx}{x}$. Pour ſavoir quel ſigne l'on doit prendre, prenez la ſomme des quarrés des différentielles des co-ordonnées & vous aurez $\left(\frac{4x^4+4a^2x^2+a^4}{aaxx}\right).dx^2 = (dL)^2$; & en prenant les racines, $dx\left(\frac{2x^2+a^2}{ax}\right) = dL$. Différenciez $-\frac{1}{a}.(xx-aa)$ pour avoir $-\frac{2xdx}{a}$, quantité qui étant ajoutée avec $dx\left(\frac{2x^2+aa}{ax}\right)$, donne la formule propoſée $\frac{adx}{x}$; donc dL doit avoir le ſigne $+$ auſſi bien que L, & la véritable formule ſera $-\frac{1}{a}(xx-aa) + L = S.\frac{adx}{x}$.

Le théorême précédent eſt inutile toutes les fois que $pp > 1$; car alors la co-ordonnée $s.(1-pp)^{\frac{3}{2}}$ eſt imaginaire. Pour remédier à cet inconvénient, voici la méthode qu'on peut ſuivre : ayant fait $dx = sdp$; décrivez la courbe des co-ordonnées $s.(pp-1)^{\frac{3}{2}} = y$, $s.(p^3-p) + x = u$; cela poſé, l'on aura le théorême ſuivant.

$s.\sqrt{(du^2-dy^2)}$ eſt $= s.(pp-1) + S.pdx$. Ce théorême ſe démontre comme le précédent. Car prenant les différentielles des co-ordonnées, l'on aura

$ds\,(pp-1)^{\frac{3}{2}}+3\,s.pdp.(pp-1)^{\frac{1}{2}}=dy$, $ds.(p^3-p)+3\,sp^2dp-sdp+dx=du$. Substituez dans ces différentielles, dx au lieu de $s.\,dp$ & vous aurez $ds\,(pp-1)^{\frac{3}{2}}+3\,pdx.(pp-1)^{\frac{1}{2}}=dy$, ou $(pp-1)^{\frac{1}{2}}\left(ds.(p^2-1)+3\,pdx\right)=dy$, & $p.\left(ds(pp-1)+3pdx\right)=du$. Élevez au quarré la valeur de dy, & celle de du, & vous aurez $(pp-1).\left(ds\,(pp-1)+3pdx\right)^2=dy^2$, $p^2\times\left(ds.\,(pp-1)+3pdx\right)^2=du^2$; donc $du^2-dy^2=\left(ds.(pp-1)+3pdx\right)^2$, & $ds.(pp-1)+3pdx=\sqrt{(du^2-dy^2)}$. J'ajoute au premier membre de cette équation & j'en retranche en même tems $s.d\,(pp-1)$, & j'ai $ds.(pp-1)+sd(pp-1)-2spdp+3pdx=\sqrt{(du^2-dy^2)}$ *, ou (en substituant dx au lieu de sdp) $ds.(pp-1)+sd(pp-1)+pdx=\sqrt{(du^2-dy^2)}$; donc en intégrant, on a (A) $s(pp-1)+Spdx=S.\sqrt{(du^2-dy^2)}$. Ce théorême est de Ricati, & le précédent a été trouvé par Jean Bernoulli.

Servez-vous du théorême de Bernoulli pour intégrer la formule $\sqrt{(du^2-dy^2)}$, par la rectification d'un courbe algébrique. Pour cela supposez $dy=q\,du$ & la formule deviendra $du\sqrt{(1-qq)}$, dans laquelle $qq<1$, parce que du^2 est supposé plus grand que dy^2. En effet, il est aisé de voir que la valeur qu'on a trouvée ci-dessus pour du^2, est plus grande que celle de dy^2 **.

---

* $s.\,d\,(pp-1)=s.\,2pdp=2s.pdp$.

** Car en multipliant par pp, l'on a un plus grand produit qu'en multipliant par $pp-1$.

Supposons donc que la quantité qui, dans le théorême de Bernoulli, est représentée par p. Soit ici représentée par $\sqrt{(1-qq)}$, & que la quantité qui, dans le théorême de Bernoulli est x, soit ici u, celle qui est s dans le théorême de Bernoulli sera ici appellée z; c'est pourquoi ayant introduit ces valeurs, l'on a $du = \frac{-zqdq}{\sqrt{(1-qq)}}$ *, & les co-ordonnées de la courbe seront zq^3, $zq^2\sqrt{(1-qq)} - u$. Enfin vous aurez $L = z.q^2 - S.du\sqrt{(1-qq)}$ ou $zq^2 - L = S.du\sqrt{(1-q^2)} = S.\sqrt{(du^2-dy^2)}$. Si l'on substitue cette valeur dans la formule A, il vient $s.(pp-1) + S.pdx = zq^2 - L$, ou $S.pdx = zq^2 - s.(pp-1) - L$, qui ne peut être troublée par aucune quantité imaginaire lorsque $pp > 1$. Ainsi l'on voit par les deux théorêmes précédens que toute formule différentielle algébrique; c'est-à-dire, qui ne renferme aucune quantité transcendante, peut être construite par la rectification d'une courbe algébrique.

24. PROBLEME. *Construire la formule* $\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$. L'on ne peut employer le théorême de Bernoulli, parce que en faisant $p = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$, l'on auroit $pp = \frac{x}{x-a}$, & $1 - pp = \frac{-a}{x-a}$, quantité négative (autrement $x-a$ seroit négative & $\sqrt{(x-a)}$, imaginaire aussi bien que la formule proposée); Ainsi il faut avoir recours au théorême de Vincent Ricati. L'on aura donc $pp - 1 = \frac{a}{x-a}$, $2pdp = \frac{-adx}{(x-a)^2}$, $dp = \frac{-adx}{2p.(x-a)^2} = \frac{adx}{x^{\frac{1}{2}}(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, à cause de $pp = \frac{a}{x-a}$

* Car dans le théorême de Bernoulli $dx = s.dp$; donc ici $du = zd(1-qq)^{\frac{1}{2}} = \frac{-zqdq}{\sqrt{(1-qq)}}$.

+1

$+1 = \frac{x}{x-a}$; ainſi $p = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x-a)}}$, & $s = \frac{dx}{dp} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}.(x-a)^{\frac{1}{2}}}{a}$; donc $s.(pp-1) = 2.\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)}$.

De plus l'on trouve que les co-ordonnées de la courbe qu'on doit employer ſont $2.\sqrt{ax} = y$, $-x = u$ ou $x = u$, en changeant le ſigne de x. Donc par le théorême, nous aurons $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} + S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ (B).

Conſtruiſons maintenant la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ par la rectification d'une courbe algébrique. Puiſque $u = x$, & que y eſt $= 2\sqrt{ax}$, l'on aura $du = dx$, $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. Ainſi la formule $\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ devient $dx\sqrt{\left(1 - \frac{a}{x}\right)} = \frac{dx\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}$; donc $q = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, $1 - qq = \frac{x-a}{x}$, $d\sqrt{(1-qq)} = \frac{a\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, $z = \frac{du}{d\sqrt{(1-qq)}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}.(x-a)^{\frac{1}{2}}}{a}$, & les co-ordonnées de la courbe ſeront $2\sqrt{a}.\sqrt{(x-a)}$, & $x - 2a$. Suppſons cette courbe décrite & appellons L l'arc de cette courbe qu'on doit prendre de maniere que L croiſſe, x croiſſant. Ayant fait les ſubſtitutions convenables dans la formule $zq^2 - L = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$, il vient $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} - L = S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$. C'eſt pourquoi, en ſubſtituant cette valeur de $S.\sqrt{(du^2 - dy^2)}$ dans la formule B, on trouvera $2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} + S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{x}.\sqrt{(x-a)} - L$, ou $S.\frac{-dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = -L$, ou $S.\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}} = L$; ce qui fait voir que la formule

proposée s'intègre par la rectification d'une courbe algébrique sans l'addition d'aucune quantité algébrique. Pour déterminer la courbe, je fais la co-ordonnée $2\sqrt{a}.\sqrt{(x-a)}=m$, & la co-ordonnée $x-2a=n$; donc $4a.(x-a)=mm$, $x-a=n+a$; donc $4a.(n+a)=mm$, équation à la parabole d'Appolonius. Avec le paramètre $4a$, je décris la parabole AM (Fig. 7), dont l'abscisse $AP=n+a$; donc ayant pris $Ai=a$, l'on aura $iP=n$, l'ordonnée PM étant $=m$. Je prolonge PA en D jusqu'à ce que $AD=a$, pour avoir $DP=n+2a=x$; c'est pourquoi les DP étant x, AM sera $=$ S. $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$.

RAMENER DANS CERTAINS CAS L'INTÉGRATION D'UNE FOMULE DIFFÉRENTIELLE A CELLE D'UNE AUTRE FORMULE DIFFÉRENTIELLE PLUS SIMPLE.

25. Soit proposé de réduire l'intégrale de $x^m dx \times (a+bx^n)^p$, à celle de $x^q dx(a+bx^n)^r$, en supposant $m>q$. Je prends la formule $x^{m+1}(a+bx^n)^p$, dont la différentielle est $(m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p+bnpx^{m+1}x^{n-1}\times dx(a+bx^n)^{p-1}$; donc $(m+1).S.dx.x^m(a+bx^n)^p=x^{m+1}\times(a+bx^n)^p-bnpS.x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}$, ou $S.dx.x^m(a+bx^n)^p=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$

$-\frac{bnp}{m+1}.S.x^{m+n}\times dx(a+bx^n)^{p-1}$.

De même $S.x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+n+1}-\frac{bn(p-1)}{m+n+1}\times$ $S.x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}$; donc l'on aura

$$\text{S.}x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1).(m+n+1)} + \frac{b^2n^2p.(p-1).\text{S.}x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1).(m+n+1)}$$

& en continuant de même, il ſera aiſé de voir qu'en général l'on aura $\text{S.}\,x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1).(m+n+1)} + \frac{b^2n^2p.(p-1)x^{m+2n+1}(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1).(m+n+1).(m+2n+1)}$ .... &c. $\pm \frac{b^{t-1}n^{t-1}p.(p-1).(p-2)....(p-t+1)}{(1+m).(1+m+n).(1+m+2n)...[1+m+n(t-1)]} \times x^{1+m+n(t-1)}(a+bx^n)^{p-t+1} \mp \text{S.}\,x^{m+tn}dx(a+bx^n)^{p-t} \times \frac{b^tn^tp.(p-1)....(p-t+1)}{(1+m).(1+m+n)....[1+m+n.(t-1)]}$.

Le ſigne ſupérieur a lieu lorſque t eſt un nombre entier poſitif impair; & le ſigne inférieur, lorſque t eſt un nombre entier poſitif, mais pair. Maintenant ſi $p-t=r$, ou ſi $p-r=t$, nombre entier, l'intégrale de $x^m dx(a+bx^n)^p$, ſe réduira à celle de $x^{m+tn}dx(a+bx^n)^r$; & ſi $t=\frac{q-m}{n}$ eſt un nombre entier poſitif, on réduira l'intégrale de la formule propoſée à celle de la formule $x^q dx(a+bx^n)^r$: car alors on aura $q=m+tn$.

26. Mais l'intégrale de $x^{m+tn-h}\,dx\,(a+bx^n)^r$ se réduit à l'intégrale de $x^b\,dx\,(a+bx^n)^r$, lorsque $\frac{m+tn-h}{n}$, ou lorsque $\frac{m-h}{n}$, est un nombre entier positif; c'est-à-dire, lorsque la différence des exposans des variables hors du binome étant divisée par l'exposant de la variable dans le binome, donne un nombre positif, & pour le faire voir prenez la quantité $x^{q+1}\,(a+bx^n)^{p+1}$, dont la différentielle est $(q+1).x^q\,dx(a+bx^n)^{p+1}+dx.bn.(p+1)\times x^{q+1+n-1}(a+bx^n)^p$, ou $(qa+a)x^q(a+bx^n)^p\,dx+(qbx^n+bx^n)x^q(a+bx^n)^p\,dx+bn.(p+1)\times x^{q+n}\,dx(a+bx^n)^p=(aq+a).x^q\,dx(a+bx^n)^p+(bnp+bn+qb+b).x^{q+n}dx\,(a+bx^n)^p$. Donc $\text{S.}\,x^{q+n}\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(np+n+q+1)}-\frac{a\,(q+1)\,\text{S.}\,x^q\,dx(a+bx^n)^p}{b.(np+n+q+1)}$.

Supposons maintenant qu'on veut réduire l'intégrale de $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, à celle de $x^n\,dx\,(a+bx^n)^p$. Je fais $q+n=m$, ou $q=m-n$, pour avoir $\text{S.}\,x^m\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(np+m+1)}-\frac{a\,(m-n+1)}{b\,(np+m+1)}\text{S.}\,x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^p$. Par la même raison $\text{S.}\,x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-1-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(1+m+np-n)}-\frac{a(m-n+1).\text{S.}\,x^{m-n}dx(a+bx^n)^p}{b\,(np+m+1-n)}$. Et en général on aura $\text{S.}\,x^m\,dx\,(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(np+m+1)}-$

$$\frac{a(1+m-n)x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2(np+m+1)(np+m+1-n)} +$$

$$\frac{a^2(1+m-n)(1+m-2n)x^{1+m-3n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3(np+m+1)(np+m+1-n)(np+m+1-2n)} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{a^{t-1}(1+m-n)(1+m-2n)\ldots(1+m-n.t-1)x^{1+m-tn}(a+bx^n)^{p+1}}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\ldots\left(np+m+1-n.(t-1)\right)}$$

$$+ \frac{a^t(1+m-n)(1+m-2n)\ldots(1+m-tn).S\,x^{m-tn}\,dx(a+bx^n)^p}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\ldots\left(np+m+1-n.(t-1)\right)}$$

Le signe supérieur a lieu lorsque t est pair, & l'inférieur lorsque t est impair. Ainsi il est aisé de voir que si $m-tn=u$, ou si $m-u=tn$, ou si $t=\frac{m-u}{n}$, ou si la différence des exposans de x hors du binome divisée par l'exposant n de x dans le binome, donne un nombre entier positif, on pourra réduire l'intégrale de $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ à celle de $x^u\,dx\,(a+bx^n)^p$, par le moyen de la formule précédente, ou en opérant comme on vient de le faire.

27. La formule S. $dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ dépend de la quadrature du cercle ; car en supposant le rayon CA (Fig. 2) $=1$, CP $=x$, Pp sera $=dx$, & $y\,dx=dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'élément de l'aire CBMP ; ainsi S. $dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}=$ CBMP. Si l'on vouloit ramener S. $x^4\,dx\,(1-xx)^{\frac{5}{2}}$ à S. $dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$, l'on auroit $a=1$, $b=-1$, $m=4$, $n=2$, $p=\frac{5}{2}$, & l'on trouveroit par la méthode ci-dessus (25), S. $x^4\,dx(1-xx)^{\frac{5}{2}}$

$$= \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7\,(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot 7} +$$

$\frac{5 \cdot 3 \cdot S. x^8 (1-xx)^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 7}$. Par la méthode précédente (26), l'on a $S. x^8 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x^7 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{7 x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10.8} - \frac{7 \cdot 5 x^3}{10.8.6} (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10.8.6.4} . x . (1-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10.8.6.4} . S. dx (1-xx)^{\frac{3}{2}}$; donc $S. x^6 dx (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{5} + \frac{x^7 (1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10.8} . x^5 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5}{10.8.6} . x^3 (1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10.8.6.4} . x (1-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10.8.6.4}$ CBMP, en substituant la valeur de $S. dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$, & faisant attention au multiplicateur $\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ de $S. x^8 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}}$.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES PAR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES.

28. On peut intégrer toutes les différentielles qui ne sont pas absurdes par les propriétés des courbes.

Soit la formule $\frac{-dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$, je fais cette formule $= dx$; mais par la section précédente (N°. 13), dans la tractrice l'élément de l'abscisse est $= \frac{-dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$; donc l'intégrale $-S. \frac{dy\sqrt{(aa-yy)}}{y}$ est égale à une abscisse correspondante à l'ordonnée y d'une tractrice dont

la tangente $= a$. Soit maintenant la formule $\frac{a\,dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$, l'on aura (par le N°. 21, section précédente) S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(a\,a+y\,y)}}$ $= x$, x étant l'abscisse de la courbe des sinus hyperboliques, & y l'ordonnée de la même courbe. L'on aura de même S. $\frac{a\,dy}{\sqrt{(y\,y-a\,a)}} = x$, x étant l'abscisse de la ligne des co-sinus hyperboliques. Voyez l'endroit cité.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DU CERCLE.

29. Avant d'entrer en matière nous remarquerons que tous les cercles étant des figures semblables, leurs lignes homologues droites ou courbes comme les arcs semblables, les sinus, les co-sinus, les tangentes, les co-tangentes, les sécantes, les co-sécantes appartenans à des arcs semblables, sont dans le rapport des rayons de cercles; de sorte que si on nomme R le rayon des tables, r le rayon d'un cercle quelconque; p une des lignes dont on vient de parler, prise dans le cercle du rayon R, x la ligne homologue dans le cercle du rayon r, l'on aura $R : r :: p : x = \frac{rp}{R}$, & $p = \frac{R\,x}{r}$. Donc si l'on connoit x dans le cercle dont le rayon est r, & qu'on connoisse p par les tables, l'on connoîtra la valeur de x dans le cerle dont le rayon est R, & réciproquement si on connoît p par les tables pour le cercle du rayon R, l'on connoîtra facilement la ligne homologue pour le cercle dont le rayon est r.

30. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a+cx^2}$ $= \frac{\frac{1}{c}\,dx}{\frac{a}{c}+x^2} = \frac{\frac{a\,dx}{ac}}{\frac{a}{c}+x^2}$ est $= \frac{s}{a}$; s étant un arc de cercle dont le rayon est $\sqrt{\frac{a}{c}}$ & la tangente x; car on a vu ci-dessus, section précédente (31), que $\frac{a^2\,dx}{aa+xx}$ étoit l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $= a$, & la tangente $= x$; donc si le rayon est $= \sqrt{\frac{a}{c}}$, la différentielle de l'arc sera $= \frac{\frac{a}{c}\,dx}{\frac{a}{c}+xx}$; donc, &c.

S. $\frac{dx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{s}{a}$, s étant un arc de cercle AM (Fig. 2); donc le rayon $= a$; & l'abscisse $=$ AP (ou son sinus verse) $= x$; car $\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ est l'élément d'un tel arc (section précédente 31). S. $\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = s$, s étant un arc de cercle BM, dont le rayon $= a$, & le sinus PC $=$ Mg $= x$; car les triangles semblables CPM, Mmn donnent PM : CM :: nm : Mm, ou $\sqrt{(aa-xx)} : a :: dx : \frac{a\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; donc, &c.

S. $\frac{d\int}{\int\sqrt{(\int\int - aa)}} = \frac{f}{a^2}$, f étant un arc de cercle dont le rayon $= a$ & la sécante $= \int$.

S. $\frac{-a\,dx}{(aa + xx)} = \frac{f}{a}$, f étant un arc de cercle dont la co-tangente $= x$; car on a vu dans la section précédente (21), que $\frac{a^2 d\int}{\int\sqrt{(\int\int - aa)}}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la sécante $= \int$, & que $-\frac{a^2 dx}{aa + xx}$ étoit l'élément d'un arc circulaire dont le rayon $= a$, & la co-tangente $= x$; donc, &c. On peut aussi remarquer que, selon ce qu'on a dit au même lieu, S. $\frac{-a^2 dy}{y\sqrt{(yy - aa)}}$ est $= f$, f étant un arc de cercle dont la co-sécante $= y$.

DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

31. Si l'on a une équation d'une courbe réduite à cette forme $y = ax^m + bx^n + cx^p +$ &c. y ne peut être imaginaire, à moins qu'il n'y ait dans l'équation quelque exposant pair, & que la quantité sous cet exposant soit négative. Toutes les quantités imaginaires de quelle espèce qu'elles soient peuvent se réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainsi qu'on va le démontrer après avoir établi les lemmes suivans.

32. LEMME I. $(\text{cos. } p + \sqrt{-1}\,\text{sin. } p)^m = \text{cos. } mp + \sqrt{-1}\,\text{sin. } mp$, *p étant un angle, ou*

arc dont le rayon = 1, & *m un nombre quelconque* ; cette propoſition eſt une ſuite de ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage (voyez la Géométrie). Mais pour démontrer rigoureuſement que cela a lieu, en ſuppoſant même que m eſt un nombre ſourd tel que $\sqrt{3}$, par exemple, je prends les logarithmes hyperboliques (car c'eſt de ceux-là dont il s'agira toujours, à moins qu'on avertiſſe du contraire) de part & d'autre; ce qui donne $m\,L.(\text{cof. } p + \sqrt{-1}\,\text{ſin. } p) = L.(\text{cof. } mp + \sqrt{-1}\,\text{ſin. } mp)$. Différenciant * en regardant p comme variable, on aura (A) $\dfrac{-mdp.\,\text{ſin. } p + mdp\sqrt{-1}.\,\text{cof. } p}{\text{cof. } p + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } p} = \dfrac{-m\,dp\,\text{ſin. } mp + m\,dp.\sqrt{-1}.\,\text{cof. } mp}{\text{cof. } mp + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } mp}$

Multipliant les numérateurs par $-\sqrt{-1}$, il vient $\dfrac{m\,dp.(\text{cof. } p + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } p)}{\text{cof. } p + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } p} = \dfrac{m\,dp.(\text{cof. } mp + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } mp)}{\text{cof. } mp + \sqrt{-1}.\,\text{ſin. } mp}$, ou $m\,dp = m\,dp$, équation identique ; ainſi l'équation (A), dont celle-ci eſt tirée eſt vraie ; donc, &c.

* Voyez vers le commencement de la premiere ſection comment il faut s'y prendre pour différencier les quantités logarithmiques, & celles qui renferment des ſinus & des co-ſinus.

33. LEMME II. *u étant un arc dont le rayon* $= 1$, *l'on aura* $u = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \text{L.}(\text{sin.}u\sqrt{-1} + \text{cos.}u)$. En multipliant par $\sqrt{(-1)}$. Et différenciant, il vient $du \cdot \sqrt{-1} = \frac{\text{cos.}u \cdot du\sqrt{-1} - \text{sin.}u \cdot du}{\text{sin.}u\sqrt{-1} + \text{cos.}u}$, & (en divisant par du, ôtant la fraction & faisant attention que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$) $-\text{sin.}u + \text{cos.}u\sqrt{-1} = \text{cos.}u\sqrt{-1} - \text{sin.}u$, équation identique ; donc l'équation du lemme dont celle-ci est tirée, est vraie.

34. THEORÊME. *Toutes les quantités imaginaires de quelque espece qu'elles soient, peuvent toujours se réduire à la forme* $M + N\sqrt{-1}$, *M & N étant des quantités réelles* (M *peut aussi être* $= 0$). Nous distinguerons toutes les formes des quantités imaginaires qu'il paroît possible de concevoir, 1°. Soit $a + b\sqrt{-1}$ une quantité imaginaire, a & b étant des quantités réelles. La quantité $(a + b\sqrt{-1})^m$, m étant une quantité réelle, pourra toujours se réduire à la forme dont on vient de parler. Faisons $aa + bb = c$, & cherchons l'angle p, tel que son sinus soit $= \frac{b}{c}$ & son co-sinus $= \frac{a}{c}$, cet angle p sera toujours réel, puisque a & b sont supposés des quantités réelles. Si l'on fait la demi-circonférence $= n$., les arcs dont les sinus $\frac{b}{c}$ & les co-sinus $\frac{a}{c}$ sont les mêmes, seront p, $2n + p$, $4n + p$, $6n + p$, &c. auxquels on peut ajoûter ceux-ci, $-2n + p$, $-4n + p$, $-6n + p$, &c. Cela posé, on

aura $a + b\sqrt{-1} = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\sqrt{-1}\right)$ $= c(\text{cos.}p + \text{sin.}p\sqrt{-1})$, $(a + b\sqrt{-1})^m =$ $c^m(\text{cos.}p + \text{sin.}p\sqrt{-1})^m = c^m(\text{cos.}mp +$ $\sqrt{(-1)}.\text{sin.}mp)$, par le lemme premier; donc en faisant $M = c^m \text{cos.}mp$, & $N = c^m \text{sin.}mp$, l'on aura $(a + b\sqrt{(-1)})^m = M + N\sqrt{-1}$.

2°. Si a est une quantité positive élevée à un exposant imaginaire $m + n\sqrt{(-1)}$, l'on pourra toujours réduire $a^{m+n\sqrt{(-1)}}$ à la formule du théorême. Soit $a^{m+n\sqrt{(-1)}} = x + y\sqrt{(-1)}$, l'on aura (en prenant les logarithmes) $(m+n\sqrt{-1}) \times$ $\text{L.}a = \text{L.}(x + y\sqrt{-1})$. Différenciant en regardant a, x & y comme variables, on aura $\frac{m\,da}{a}$ $+ \frac{n\,da}{a}\sqrt{-1} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{(-1)}} = \frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy}$ $+ \frac{(x\,dy-y\,dx)\sqrt{(-1)}}{xx+yy}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $x - y\sqrt{(-1)}$. Égalant séparément les quantités réelles aux quantités réelles & les imaginaires aux imaginaires (ce qu'on doit toujours faire, autrement l'on supposeroit qu'une quantité réelle peut être égale à une quantité imaginaire), l'on a $\frac{m\,da}{a} = \frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy}$ & $\frac{n\,da\sqrt{(-1)}}{a} = \frac{(x\,dy-y\,dx).\sqrt{(-1)}}{xx+yy}$; donc en divisant par $\sqrt{(-1)}$, cette dernière équation devient $\frac{n\,da}{a} = \frac{x\,dy-y\,dx}{xx+yy}$; donc en intégrant l'on aura ces deux autres équations $m\,\text{L.}a$

$= L.\sqrt{(xx+yy)}$, & $n L\, a = f$, f étant un arc dont la tangente est $= \frac{y}{x}$; car en faisant le rayon $= a$, la tangente $= z$, l'on auroit la différentielle de l'arc $= \frac{a\,a\,dz}{aa+zz}$. Donc en faisant $a = 1$ & $z = \frac{y}{x}$, l'on aura la différentielle de l'arc $= \frac{x\,dy - y\,dx}{xx+yy}$; donc $\frac{y}{x} =$ tang. $n . L.\, a$. C'est pourquoi en prenant dans un cercle AB (Fig. 2), dont le rayon est supposé $= 1$, l'arc $n L.\, a = AM$, l'on aura $CP = x =$ cos. $n L.\, a$, & $PM = y =$ sin. $n L.\, a$; donc $a^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} =$ cos. $n L.\, a +$ sin. $n L.\, a\sqrt{-1} = M + N\sqrt{(-1)}$, en faisant cos. $n L.\, a = M$, & sin. $n L.\, a = N$. Il est visible que a étant une quantité positive, M & N sont des quantité réelles. Si on prend l'arc $n L.\, a$ dans un cercle dont le rayon $= \sqrt{(y^2+x^2)} = a^m$, l'on aura $(a+b\sqrt{-1})^m = a^m$ cos. $n L.\, a + a^m$ sin. $n L.\, a\sqrt{-1}$; (car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (29) dans ce cas, l'on a $x = a^m$ cos. $n L.\, a$), & il est visible que cette quantité se réduit à la même forme $M + N\sqrt{(-1)}$.

3°. Si l'on a la quantité $(a+b\sqrt{-1})$ élevée à un exposant imaginaire $m + n\sqrt{-1}$. Ce cas sera encore compris dans la formule $M + N\sqrt{-1}$: car soit $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1})$, on aura, en prenant les logarithmes, $(m + n\sqrt{-1}) . L. (a+b\sqrt{-1}) = L. (x+y.\sqrt{-1})$. Et en prenant les différen-

tielles, multipliant & divisant celle de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$, & celle de $a + b\sqrt{-1}$ par $a - b\sqrt{-1}$, l'on a $\frac{x\,dx + y\,dy}{xx + yy} + \frac{(x\,dy - y\,dx)\sqrt{(-1)}}{xx + yy} = \frac{m(a\,da + b\,db)}{aa + bb} + \frac{n(a\,da + b\,db)\sqrt{-1}}{aa + bb} + \frac{m(a\,db - b\,da)\sqrt{-1}}{aa + bb} - \frac{n(a\,db - b\,da)}{aa + bb}$. En égalant les quantités réelles aux quantités réelles, les imaginaires aux imaginaires, il vient $\frac{m(a\,da + b\,db)}{aa + bb} - \frac{n(a\,db - b\,da)}{aa + bb} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx + yy}$, & $\frac{m(a\,db - b\,da)}{aa + bb} + \frac{n(a\,da + b\,db)}{aa + bb} = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy}$. Pour en prendre les intégrales, je fais $\sqrt{(aa + bb)} = c$, l'arc dont la tangente est $\frac{b}{a}$ étant supposé p; ainsi $\text{fin.} = p\,\frac{b}{c}$, & $\text{cos.}\, p = \frac{a}{c}$; donc les intégrales feront $m\,\text{L.}\,e - np = \text{L.}\sqrt{(xx + yy)}$, $mp + n\,\text{L.}\,e = \text{A. Tang.}\,\frac{y}{x}$ (A désigne l'arc de la tang. $\frac{y}{x}$). Mais $m\,\text{L.}\,c - np = m\text{L.}\,c - np\,\text{L.}\,e$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$; donc $\text{L.}\sqrt{(xx + yy)} = m\,\text{L.}\,c - np\,\text{L.}\,e$, ou $\sqrt{(xx + yy)} = c^m\,e^{-np}$. Ainsi prenant $\sqrt{(aa + bb)} = c$, & l'angle p tel que $\text{cos.}\, p = \frac{a}{c}$, & $\text{fin.}\, p = \frac{b}{c}$, & faisant le rayon du

cercle $= \sqrt{(xx + yy)}$, on aura $x = c^m e^{-np} \cos.(mp + n \text{ L. } c)$, & $y = c^m e^{-np} \sin.(mp + n \text{ L. } c)$. Donc $x + y\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{(-1)}}$ eſt réductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$. De plus ſi les expoſans étoient élevés eux-mêmes à des puiſſances dont les expoſans fuſſent imaginaires, ils ſeroient compris ſous la même forme. Car ſi q, r, t, ſont des imaginaires de la forme $M + N\sqrt{(-1)}$, la quantité $a^{q^{r^t}}$ ſera compriſe ſous la même forme, puiſque r^t eſt réductible à cette forme, & par conſéquent auſſi q^{r^t}.

4°. Il eſt évident que toutes les fractions formées par addition, ſouſtraction, multiplication ou diviſion de tant de formules imaginaires que ce ſoit de cette forme $M + N\sqrt{-1}$, ſeront compriſes dans la même forme; car qu'on imagine tant de formules imaginaires $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, &c. qu'on voudra, il eſt clair qu'en ajoûtant enſemble ces formules, l'expreſſion qui en réſultera ſera toujours compriſe ſous la même forme, en faiſant $a + a' + a''$ &c. $= M$ & $b + b' + b''$ &c. $= N$. Il eſt aiſé de voir que ſi on retranche quelques unes de ces formules le réſultat ſera encore réductible à la même forme.

Si on multiplie $a + b\sqrt{-1}$ par $a' + b'\sqrt{-1}$, le produit $aa' - bb' + (ab' + a'b)\sqrt{-1}$, ſera réductible à la même forme $M + N\sqrt{-1}$, laquelle étant encore multipliée par $a'' + b''\sqrt{(-1)}$ don-

nera auſſi la même forme. Il ne s'agit plus que de la diviſion : or il eſt viſible que ce cas ſe réduit toujours à une fraction de cette forme $\frac{A+B\sqrt{(-1)}}{C+D\sqrt{(-1)}}$, dans laquelle le numérateur & le dénominateur peuvent être compoſés par addition, ſouſtraction & multiplication d'autant de formules imaginaires qu'on voudra de la forme $M+N\sqrt{-1}$: or cette fraction peut toujours ſe réduire à une autre dont le dénominateur ſoit réel en multipliant tout par $C-D\sqrt{-1}$; car alors il vient $\frac{AC+BD+(BC-AD)\sqrt{(-1)}}{CC+BD}$, & en faiſant $\frac{AC+BD}{CC+BD}=M$, $\frac{BC-AD}{CC+BD}=N$, on aura la forme $M+N\sqrt{(-1)}$.

5°. Il eſt encore évident que toutes les puiſſances d'une formule $A+B\sqrt{-1}$, dont l'expoſant m eſt un nombre entier poſitif, ſeront compriſes dans la forme du théorême. Car $(A+B\sqrt{-1})^m$ n'eſt autre choſe que le produit de $A+B\sqrt{-1}$ multiplié par lui-même un nombre de fois déſigné par $m-1$. Ce ſera la même choſe ſi m eſt un nombre entier négatif ; car alors on a $\frac{1}{(A+B\sqrt{-1})^m}$, qui ſe réduit à la forme $\frac{1}{M+N\sqrt{-1}}$. Celle-ci ſe réduit en multipliant haut & bas par $M-N\sqrt{-1}$, à cette autre $\frac{M-N\sqrt{-1}}{MM+NN}$, qui eſt évidemment réductible à la forme du théorême.

6°. La

6°. La formule générale $M + N\sqrt{-1}$ comprend encore le cas de $N = 0$, & par conséquent toutes les quantités réelles. Il peut arriver que le produit des formes imaginaires soit réel, alors $N = 0$; ainsi le produit de $a + b\sqrt{-1}$ par $a - b\sqrt{-1}$ est $= aa + bb$.

7°. Une racine m quelconque d'une quantité imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$, sera toujours de la même forme; c'est-à-dire $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$, sera toujours contenue dans la formule du théorême. Soit $\sqrt{(aa + bb)} = c$, p un angle dont le sinus $= \frac{a}{c}$ & le co-sinus $= \frac{b}{c}$, on aura $a + b\sqrt{-1} = c.(\text{cos. } p + \sqrt{(-1)}.\text{sin. } p)$. Mais, selon le lemme ci-dessus (32), l'on a $(\text{cos. } p + \sqrt{-1}.\text{sin. } p)^m = \text{cos. } mp + \sqrt{-1}.\text{sin. } mp$, quelque nombre que soit m, même fractionnaire; donc $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{(a + b\sqrt{-1})} = c^{\frac{1}{m}}(\text{cos. } \frac{1}{m}p + \sqrt{-1}.\text{sin. } \frac{1}{m}p)$. Mais c étant une quantité réelle aussi bien que a & b, $\frac{1}{m}p$ sera une quantité réelle; donc $\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})}$ appartient à la forme $M + N\sqrt{-1}$; & *en général toute expression imaginaire est réductible à la forme* $M + N\sqrt{-1}$.

La racine quarrée de $a+\sqrt{-b}$, b étant positif peut s'exprimer généralement par $\pm\left[\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{(aa+b)}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{(aa+b)}}{2}\right)}\right]$; car en élevant cette quantité au quarré, on trouve $a + \sqrt{-b}$. La quantité $\sqrt{-b} = \sqrt{(\sqrt{-}b)} = \sqrt{(-\sqrt{b})}$,

ſe réduit facilement à la forme $M + N\sqrt{-1}$, & il en eſt de même pour toutes les quantités imaginaires quelconques *.

35. THÉORÊME. *La quantité imaginaire* $a \pm b\sqrt{-1}$, *dans laquelle* a & b *ſont réels, peut toujours ſe réduire à la forme cof.* $V \pm$ *ſin.* $V.\sqrt{(-1)}$. Soit pris l'arc V dans un cercle dont le rayon $r = \sqrt{(aa + bb)}$, & prenant l'arc u ſemblable dans un cercle dont le rayon $= 1$, on aura cof. $V = \frac{r}{1}$ cof. $u = r$ cof. u, & ſin. $V = r$ ſin. u; donc $a \pm b\sqrt{-1} = r.$ cof. $u \pm r$ ſin. $u\sqrt{-1}$: or ſi l'on fait cof. $V = a$, l'on aura ſin. $V = \sqrt{(rr - \overline{\text{cof. } V}^2)} = \sqrt{(aa + bb - aa)} = b$; donc r cof. $u \pm r \times$ ſin. $u\sqrt{-1} =$ cof. $V \pm$ ſin. $V\sqrt{-1} = a \pm b\sqrt{-1}$.

REMARQUE I. Si l'on avoit $b\sqrt{-1}$, il eſt viſible qu'on ne peut réduire cette quantité à la forme $M + N\sqrt{-1}$ qu'en ſuppoſant $M = 0$.

REMARQUE II. L'on a vu ci-deſſus (33), que l'arc $u = \frac{1}{\sqrt{-1}}$. L (cof. u + ſin. $u\sqrt{-1}$); donc

* Le quarré de la quantité $a + a\sqrt{-1}$ eſt $= aa + 2aa.\sqrt{-1} - aaa = 2.\sqrt{-1}$, en ſuppoſant $a = 1$; donc $(2.\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}} = 1 + 1\sqrt{-1}$; ce qui fait voir que la racine de la quantité $2.\sqrt{-1}$ peut contenir une quantité entièrement réelle; c'eſt-à-dire, qui n'eſt affectée d'aucun multiplicateur imaginaire.

en multipliant, de part & d'autre, par rn, l'on aura $rnu = \frac{rn}{\sqrt{-1}}$ L. (cof. u + fin. $u . \sqrt{-1}$) = L. (cof. u + fin. $u\sqrt{-1}$)$^{-rn\sqrt{-1}}$ (car $\frac{rn}{\sqrt{-1}} = \frac{rn.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} = \frac{rn.\sqrt{-1}}{-1}$ $= -rn\sqrt{-1}$) $= \text{L.} \frac{1}{(\text{cof.}u+\text{fin.}u\sqrt{-1})^{rn\sqrt{-1}}}$ = L. (cof. u − fin. $u\sqrt{-1}$)$^{rn\sqrt{-1}}$; puiſque $\frac{1}{\text{cof. } u + \text{fin. } u\sqrt{-1}} = \text{cof. } u -$ fin. $u\sqrt{-1}$. En effet, en ôtant la fraction, l'on trouve cof. u^2 + fin. $u^2 = 1$, quarré du rayon 1 ; donc L. (cof. $u \pm$ fin. $u\sqrt{-1}$)$^{\mp rn\sqrt{-1}}$ $= rnu = rnu$ L. e, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; donc (cof. $u \pm$ fin. $u\sqrt{-1}$)$^{\mp rn\sqrt{-1}} = e^{\mp rnu}$, quantité réelle. Si l'on fait $M + N\sqrt{-1} =$ r cof. $u \pm r$ fin. $u\sqrt{-1}$, ou $\frac{M}{r} + \frac{N}{r}\sqrt{-1}$ = cof. $u \pm$ fin. $u\sqrt{-1}$, & qu'on faſſe $a = \frac{M}{r}$, $b = \frac{N}{r}$, l'on aura $(a \pm b\sqrt{-1})^{\mp rn\sqrt{-1}} = e^{\mp rnu}$; donc quand on dit que $(a + b\sqrt{-1})^{m\sqrt{-1}}$ peut toujours ſe réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$. Quelque ſoit m, on doit entendre que m étant une quantité réelle $= \mp rn$, N ſera $= 0$, dans la formule $M + N\sqrt{-1}$, ce qu'il eſt bon de remarquer.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES LOGARITHMIQUES.

36. L'on a vu dans la premiere ſection comment il falloit différencier les quantités logarithmiques & exponentielles, on a vu auſſi comment on pouvoit obtenir dans certains cas des intégrales logarithmiques & exponentielles. Nous allons maintenant reprendre la même matiere.

Toutes les fois que l'on peut décompoſer une formule différentielle fractionnaire en deux facteurs dont le dividende ſoit la différentielle du diviſeur, l'intégrale eſt égale au logarithmique du dénominateur en y ajoutant une conſtante. Ainſi $S.\frac{dx}{x} = L.x + C.$ Quand nous n'ajouterons point de conſtante, le lecteur doit y ſuppléer. $S.\frac{dz}{a+z} = L.(z+a)$. Mais ſi la fraction dont on vient de parler contenoit un facteur conſtant qui n'appartînt pas à la différentielle du dénominateur, on mettroit à part ce facteur, & l'on multiplieroit enſuite l'intégrale par le même facteur. Ainſi $S.\frac{b \cdot 2xdx}{aa+xx} = bS.\frac{2xdx}{aa+xx} = bL.(aa+xx)$; $S.\frac{dz}{b.(z+a)} = S.\frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{z+a} = \frac{1}{b} S.\frac{dz}{z+a} = \frac{1}{b} L.(z+a)$.

Si la différentielle appartenoit au logarithme d'une fraction, il ſeroit plus aiſé de s'y tromper;

par exemple, S. $\frac{x\,dy - y\,dx}{yx} = L.\frac{y}{x}$.

Soit la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$, en supposant $x = y - a$, & $dx = dy$, elle devient $\frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$, dont l'intégrale est $L.\left(y + \sqrt{(y^2 - aa)}\right) + C$, comme il est facile de s'en assurer en différenciant cette quantité. L'on a aussi S. $\frac{dx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = L.\left(x + a + \sqrt{(2ax + xx)}\right)$. La différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(xx - bx + c)}}$ devient (en faisant $x = y + \frac{b}{2}$) $= \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}}$, dont l'intégrale est $L.\left(y + \sqrt{(y^2 - \frac{b^2}{4} + c)}\right)$ $= L.\left(x - \frac{b}{2} + \sqrt{(xx - bx + c)}\right)$. On a de même S. $\frac{dx}{\sqrt{(aa + xx)}} = L.\left(x + \sqrt{(aa + xx)}\right)$;

S. $\frac{dx}{x\sqrt{(aa + xx)}} = -\frac{1}{a}L.\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{aa}{xx} + 1\right)}\right)$;

S. $\frac{-dx}{a\sqrt{(xx + 1)}} = -\frac{1}{a}\left(L.x + \sqrt{(xx + 1)}\right)$;

S. $\frac{dx}{x.(1 + L.x)} = L.(1 + L.x)$;

S. $\left(\frac{dx}{x}.Lx.L.(L.x)\right)=\frac{(L.x)^2}{2}\left(L.(L.x)-\frac{1}{2}\right)$;

S. $\frac{dx\,L.x}{(1-x)^2}=\frac{x\,L.x}{1-x}+L.(1-x)$.

A l'égard des quantités exponentielles, on verra (voyez la section premiere n°. 26), si l'on peut les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre ; divisant alors par le premier facteur, l'on aura l'intégrale cherchée. Ainsi la différentielle $x^{z}.y^{z}\left(\frac{dx}{x}+dz.L.x.L.y+\frac{z\,L\,x.dy}{y}\right)$ est intégrable ; parce que $y^{z}\left(\frac{dx}{x}+dz.L.x.L.y+\frac{z\,L.x.dy}{y}\right)$ est la différentielle du logarithme de $x^{y^{z}}$, ou de $y^{z}L.x$. & l'intégrale est $x^{y^{z}}$.

Selon ce qu'on a dit section précédente (18), S. $\frac{dx\,L.x}{x}=\frac{1}{2}(L.x)^2$, & S. $x^m(L.x)^m dx=$

$$\frac{1}{m+1}x^{m+1}(L.x)^m-\frac{m}{(m+1)^2}.x^{m+1}(L.x)^{m-1}+\frac{m.(m-1)}{(m+1)^3}x^{m+1}(L.x)^{m-2}\ \&c.$$

37. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^n dx\,L.x$. à cause de S. $x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, l'on aura, par la formule S. $dyx=xy-S.xdy$;

$S. x^n dx L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \times L. x -$

$S. \frac{1}{n+1} x^n d L. x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$

$\frac{1}{n+1} S. x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} L. x -$

$\frac{1}{(n+1)^2} \cdot x^{n+1}$.

Soit proposé d'intégrer la formule $m(L.x)^{m-1} \frac{dx}{x}$.

Je fais $L. x = y$, pour avoir $\frac{dx}{x} = dy$, & $(L. x)^{m-1} = y^{m-1}$; donc la formule proposée est $= m y^{m-1} dy$, dont l'intégrale $= y^m = (L. x)^m$. Soit $(L. x^m)^{n-1} \frac{dx}{x}$; je fais $x^m = y$. Donc $m x^{m-1} dx = dy$, $dx = \frac{dy}{m x^{m-1}}$. De plus l'on aura $L. x^m = L. y$; substituant ces valeurs, la formule proposée devient $\frac{1}{m} (L.y)^{n-1} \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale $= \frac{1}{m.n} (L. y)^n = \frac{1}{m.n} (L.x^m)^n$. L'on a aussi $S. -\frac{dy}{y} = -L.y = L.\left(\frac{1}{y}\right) = L. 1 - L. y = -L. y$, à cause de $L. 1 = 0$; ce qu'il est bon de remarquer.

38. PROBLÊME. *Intégrer la formule* $\frac{dx}{1-x} L.x$.

Soit $1 - x = u$, ou $x = 1 - u$, la formule

deviendra $-\frac{du}{u}$ L. $(1-u)$. La différentielle de L. $(1-u)$ est $=\frac{-du}{1-u}=-du.(1-u)^{-1}=$ $-du-u\,du-$ &c. Donc L. $(1-u)=$ $-u-\frac{u^2}{2}-$ &c. Et S. $-\frac{du}{u}$. L. $u = C$ $+u+\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{9}u^3+\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{25}u^5+$ &c. Si l'on veut que cette série soit égale à 0, lorsque $x=0$, ou lorsque $u=1$, l'on aura $C+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ &c. $=0$, ou $C=-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}$ &c.

39. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale de la formule* $\frac{dx}{(1-x)^2}$. L. x. Je fais $u=1-x$, & la formule devient $\frac{-du}{uu}$ L. $(1-u)=\frac{du}{u}+\frac{1}{2}du$ $+\frac{1}{3}u\,du+\frac{1}{4}u^2\,du$ &c. dont l'intégrale $=C+$ L. $u+\frac{u}{1.2}+\frac{uu}{2.3}+\frac{u^3}{3.4}+\frac{u^4}{4.5}$ &c. Pour que cette série s'évanouisse lorsque $x=0$, ou lorsque $u=1$, l'on doit avoir $C=-$ L. $1-$ $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}$ &c. $=-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}$ &c. Car L. $1=0$.

40. PROBLEME. *Supposant que p est une fonction de x, trouver l'intégrale de la formule* $dp\,(L.x)^n$. Si l'on ajoutoit à cette différentielle la formule $pd(L.x)^n$, on auroit $p(L.x)^n=S.\,dp\,(L.x)^n+S.\,pd\,(L.x)^n$; donc S. $dp\,(L.x)^n=p\,(L.x)^n-S.\,pd(L.x)^n=p$ L. x^n-

$n\,S.\frac{p\,dx}{x}(L.x)^{n-1}$; donc ſi $S.p\frac{dx}{x} = q$, l'on aura de même $S.p\frac{dx}{x}(L.x)^{n-1} = q(L.x)^{n-1} - (n-1)\times S\,q\frac{dx}{x}.(L.x)^{n-2}$. En opérant de même, & ſuppoſant $S.\frac{q\,dx}{x} = R$; $S.\frac{R\,dx}{x} = t$, $S.\frac{t\,dx}{x} = u$ &c. l'on aura $S.\,dp\,(L.x)^n = p\,(L.x)^n - n\,q\,(L.x)^{n-1} + n.(n-1).R(L.x)^{n-2} - n.(n-1).n-2.t\,(L.x)^{n-3}$ &c. Si n eſt un nombre entier poſitif, l'intégrale ne contiendra qu'un nombre fini de termes.

EXEMPLE I. Soit la formule $x^m\,dx\,(L.x)^2$, l'on aura $n=2, p=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, $q=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, & $R=\frac{x^{m+1}}{(m+2)^3}$; donc $S.x^m\,dx\,(L.x)^2 = x^{m+1}\times\left(\frac{(L.x)^2}{m+1} - \frac{2\,L.x}{(m+1)^2} + \frac{2.1}{(m+1)^3}\right)$. Si $m=-1$, l'on aura $S.\frac{dx}{x}(L.x)^2 = \frac{1}{3}(L.x)^3$; ce cas eſt excepté de la formule générale.

EXEMPLE II. Soit la formule $x^{m-1}\,dx\,(L.x)^3$; l'on a $n=3$, $p=\frac{x^m}{m}$; $q=\frac{x^m}{m^2}$; $R=\frac{x^m}{m^3}$, & $t=\frac{x^m}{m^4}$; donc $S.x^{m-1}\,dx\,(L.x)^3 = x^m\left(\frac{(L.x)^3}{m} - \frac{3\,(L.x)^2}{m^2} + \frac{3.2\,L.x}{m^3} - \frac{3.2.1}{m^4}\right)$. Si m eſt un nombre entier poſitif > 0, cette intégrale devient $= 0$, lorſque $x = 0$.

41. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la formule* $a^x p\,dx$, *p étant une fonction de* x. Puiſque $d.a^x$ eſt $= a^x\,dx\,L.a$ par la nature des quantités exponentielles, on aura auſſi $S.a^x\,dx = \frac{1}{L.a}a^x$; donc $S.p\,a^x\,dx = \frac{1}{L.a}\,a^x\,p -$

$\frac{1}{L.a}$ S. $a^x dp$. Si l'on ſuppoſe $dp = q\,dx$ pour avoir S. $a^x q\,dx = \frac{1}{L.a} a^x q - \frac{1}{L.a}$ S. $a^x dq$, l'on aura cette réduction S. $a^x p\,dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q + \frac{1}{(L.a)^2}$ S. $a^x dq$; & ſi l'on fait $dq = R\,dx$, il viendra cette réduction S. $a^x p\,dx = \frac{1}{L.a} a^x p - \frac{1}{(L.a)^2} a^x q + \frac{1}{(L.x)^3} a^x R - \frac{1}{(L.a)^3}$ S. $a^x dR$, & ainſi de ſuite. L'on peut continuer juſqu'à ce que l'on parvienne à une formule intégrable, ou à une forme la plus ſimple de ſon eſpece.

EXEMPLE. Soit la formule $a^x x^n dx$, n étant un nombre entier poſitif; puiſque $x^n = p$, nous aurons S. $a^x x^n dx = \frac{1}{L.a} a^x x^n - \frac{n}{L.a}$ S. $a^x x^{n-1} dx$. Si l'on fait ſucceſſivement $x = 0, 1, 2, 3$, &c. l'on aura

S. $a^x dx = \frac{1}{La} a^x$

S. $a^x x\,dx = \frac{1}{La} a^x x - \frac{1}{(La)^2} a^x$

S. $a^x x^2 dx = \frac{1}{La} a^x x^2 - \frac{2}{(La)^2} a^x x + \frac{2.1}{(La)^3} a^x$.

S. $a^x x^3 dx = \frac{1}{La} a^x x^3 - \frac{3}{(La)^2} a^x x^2 + \frac{3.2}{(La)^3} a^x x - \frac{3.2.1}{(La)^4} a^x$.

Et S. $a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{La} - \frac{n.x^{n-1}}{(La)^2} + \frac{n.(n-1).x^{n-2}}{(La)^3} - \frac{n.(n-1).(n-2)x^{n-3}}{(La)^4} + \text{&c.}\right)$

Soit proposé de trouver l'intégrale de la formule $\frac{a^x dx}{x}$.

Selon ce qu'on a dit dans la premiere partie de cet ouvrage (courbes algébriques 47), en appellant p le logarithme d'un nombre, ce nombre sera $= 1 + p + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3}$ &c. Donc puisque L. $a^x = x$ L. a, l'on aura $a^x = 1 + x$ L. $a + x^2 \frac{(\text{L. } a)^2}{1\ 2} +$ &c. Si l'on multiplie cette série par $\frac{dx}{x}$, & qu'on integre en ajoutant une constante, il viendra S. $\frac{a^x dx}{x} = C + $ L. $x + \frac{x \text{ L. } a}{1} + \frac{x^2 (\text{L. } a)^2}{1.2.2} + \frac{x^3 (\text{L. } a)^3}{1.2.3.3}$ &c. Si au lieu de a, l'on prend le nombre e, dont le logarithme hyperbolique soit l'unité, il viendra S. $\frac{e^x dx}{x} = C + $ L. $x + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}.\frac{x^3}{1.2.3}$ &c. Si l'on fait $e^x = z$, ou x L. $e = x =$ L. z, ce qui donne $dx = \frac{dz}{z}$, $\frac{e^x dx}{x} = \frac{z dz}{z \text{L. } z} = \frac{dz}{\text{L. } z}$, l'on aura S. $\frac{dz}{\text{L. } z} = C +$ L. L. $z + \frac{\text{L. } z}{1} + \frac{1}{2}.\frac{(\text{L. } z)^2}{1.2} +$ &c.

Pour que cette intégrale s'évanouisse lorsque $z = 0$, la constante C doit être infinie, parce que le logarithme de 0 est infini (négatif) c'est la même chose si l'intégrale doit s'évanouir, lorsque $z = 1$, parce que le terme L. L. z devient alors $=$ L. 0. Si z est plus petit que l'unité, L. z devient négatif, & L. L. z imaginaire; & Si l'intégrale est réelle, dans ce cas elle sera imaginaire pour les valeurs de z plus grandes que l'unité, & réciproquement.

Si l'on avoit à intégrer la formule $\frac{x^{m-1} dx}{\text{L. } x}$, en faisant $x^m = z$, on auroit $x^{m-1} dx = \frac{1}{m} dz$, m L. $x =$

L. z, ou L. $x = \frac{1}{m}$ L. z, & la formule ſe changeroit en celle-ci $\frac{dz}{L.\,z}$ dont on vient de parler. L'on peut auſſi lorſque l'intégration ne réuſſit pas, réduire la formule $a^x p\,dx$ en ſérie, & l'on aura S. $a^x p\,dx$ = S. $p\,dx + \frac{L.a}{1}$ S. $p x\,dx + \frac{(L.a)^2}{1.2}$. S. $p x^2\,dx$ &c.; ainſi ſi $p = x^n$, S $a^x p dx$ ſera $= C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{(L.a)\,x^{n+2}}{1.(n+2)} + \frac{(L.a)^2 x^{n+3}}{1.2.(n+3)}$ &c. Or il faut remarquer que ſi $n = -1$, au lieu de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, l'on doit écrire L. x.

Soit la formule $\frac{a^x dx}{1-x}$; l'on aura $p = \frac{1}{1-x}$; $q = \frac{1}{(1-x)^2}$; $R = \frac{1.2}{(1-x)^3}$; $t = \frac{1.2.3}{(1-x)^4}$; &c. Donc S. $\frac{a^x dx}{1-x} = a^x \left(\frac{1}{(1-x)\,L.\,a} - \frac{1}{(1-x)^2 (L.a)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3 (L.a)^3}\right.$ &c.$\left.\right)$

42. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la formule exponentielle* $x^{nx} dx$. Je réduis x^{nx} en ſérie pour avoir $x^{nx} = 1 + nx\,L.x + \frac{n^2 x^2 (L.x)^2}{1.2} + \frac{n^3 x^3 (L.x)^3}{1.2.3}$ &c. Multipliant par dx & intégrant chaque terme l'on a

S. $dx = x$.

S. $x\,dx\,L\,x = x^2 \left(\frac{L\,x}{2} - \frac{1}{2^2}\right)$.

S. $x^2\,dx\,(L\,x)^2 = x^3 \left(\frac{(L\,x)^2}{3} - \frac{2(L\,x)}{3^2} + \frac{2.1}{3^3}\right)$.

S. $x^3 dx\,(Lx)^3 = x^4 \left(\frac{(Lx)^3}{4} - \frac{3(Lx)^2}{4^2} + \frac{3.2.Lx}{4^3} - \frac{3.2.1}{4^4}\right)$.

&c. = &c.

Et en général si l'on substitue ces séries & qu'on les arrange par rapport aux puissances de Lx, l'intégrale sera exprimée par les séries qu'on voit ici.

$$\int x^n x\,dx = \begin{cases} +x\left(1-\frac{nx}{2^2}+\frac{n^2x^2}{3^3}-\frac{n^3x^3}{4^4}+\frac{n^4x^4}{5^5}\ \&c.\right. \\ +\frac{nx^2}{1}Lx\left(\frac{1}{2^1}-\frac{nx}{3^2}+\frac{n.n.x^2}{4^3}-\frac{n^3x^3}{5^4}\ \&c.\right. \\ +\frac{n^2x^3(Lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3^1}-\frac{nx}{4^2}+\frac{n^2x^2}{5^3}-\frac{n^3x^3}{6^5}\ \&c.\right. \\ \&c. \end{cases}$$

Soit la formule $e^x(dp+p\,dx)$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$; il est évident que l'intégrale est $=e^x p$.

Il est difficile de donner des règles qui fassent trouver l'intégrale dans des cas semblables, & souvent il faut procéder par conjecture; comme par exemple, si l'on proposoit la formule $\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}$, on pourra soupçonner que l'intégrale de cette différentielle est de cette forme $\frac{e^x z}{1+x}$. Pour s'en assurer, on différenciera l'intégrale supposée, pour avoir $\frac{e^x\left(dz(1+x)+xz\,dx\right)}{(1+x)^2}$. Comparant avec la formule proposée, l'on trouve $dz(1+x)+xz\,dx=x\,dx$, où l'on voit tout de suite que $z=1$ & $dz=0$, ce que les règles ne feroient pas facilement connoître.

La différentielle $dx\sqrt{(xx+aa)}$ a pour intégrale la quantité $\frac{1}{2}x\sqrt{(xx+aa)}+\frac{1}{2}aaL\left(x+\sqrt{(xx+aa)}\right)+C$. Si l'on suppose $a=\frac{1}{2}p$, p étant le paramètre d'une parabole ordinaire dont l'ordonnée est y, l'élément de l'arc de cette courbe, sera $\frac{2\,dy}{p}\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)}$. Donc

cet arc ſera $= \frac{y}{p}\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)}+\frac{1}{4}p\,L.\left(y+\sqrt{(yy+\frac{1}{4}pp)}\right)+C$. Or il eſt viſible que $C=-\frac{1}{4}pL.\frac{1}{2}p$.

DES FORMULES QUI RENFERMENT LA DIFFÉRENCE D'UN ARC CIRCULAIRE, OU DU LOGARITHME HYPERBOLIQUE SIMPLE, MULTIPLIÉE OU DIVISÉE PAR DES SINUS ET DES CO-SINUS.

43. Nous déſignerons le logarithme hyperbolique ſimple par x au lieu de le déſigner par m, comme nous l'avons fait dans les ſections coniques (84); & alors, les deux formules qui regardent les ſinus & les co-ſinus multiples, en déſignant le ſinus hyperbolique par sh, & le co-ſinus hyperbolique par $c.h$, deviendront

$$c.h.n.x=\frac{(c.h.x+s.h.x)^n+(c.h.x-s.h.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

$$s.h.n.x=\frac{(c.h.x+s.h.x)^n-(c.h.x-s.h.x)^n}{2.r^{n-1}}$$

dans ces formules, r déſigne le demi-axe de l'hyperbole équilatère, ou ſi l'on veut le ſinus total.

Si dans les formules qu'on a trouvées (géom. 176) on ſubſtitue x au lieu de a, l'on aura pour le cercle dont le rayon $= r$, & x un arc quelconque

$$\text{Cof.}nx=\frac{(\text{cof.}x+\sqrt{-1}\,\text{ſin }x)^n+(\text{cof.}x-\sqrt{-1}\,\text{ſin.}x)^n}{2r^{n-1}}$$

$$\text{Sin.}nx=\frac{(\text{cof.}x+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}x)^n-(\text{cof.}x-\sqrt{-1}\,\text{ſin.}x)^n}{2r^{n-1}\sqrt{-1}}$$

Ces quatre formules ont lieu, quelque ſoit le nombre n poſitif ou négatif, & même irrationnel. Nous déſignons le ſinus d'un arc circulaire x par ſin. x, ſon co-ſinus

par col. x, tangente hyperbolique par $t.h$, co-tangente hyperbolique par cot. h.

REMARQUE. L'on ſait que dans le cercle, le co-ſinus eſt au ſinus comme le rayon eſt à la tangente, & que la tangente eſt au rayon comme le rayon à la co-tangente; or c'eſt la même choſe dans l'hyperbole équilatère (Fig. 8); car ſoit C P le co-ſinus, P M le ſinus, le demi-axe C B = C A = r, la tangente A f = t, les triangles rectangles ſemblables C A f, C P M, donnent C P : P M :: C A : A f, ou $c.h : s.h :: r : t.h$. Les triangles ſemblables B F C, C f A (ces triangles ont les angles en F & C, alternes internes à cauſe des parallèles B F, C A) donnent A f : C A :: C B : B F; or B F eſt la co-tangente correſpondante au ſinus pM; donc $t.h : r :: r$: cot. h. De ces proportions, on conclut que $s.h.x = \frac{c.h.x.t.h.x}{r}$; ſi l'on ſubſtitue cette valeur de $s.h.x$ dans les deux premières formules l'on a,

$$c.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n}\left(\frac{(r+t.h.x)^n + (r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}}\right)$$

$$s.h.n.x = \frac{(c.h.x)^n}{r^n} \times \left(\frac{(r+t.h.x)^n - (r-t.h.x)^n}{2r^{n-1}}\right).$$

Mais $t.h = \frac{s.h.r}{c.h}$, donc $t.h.n.x = \frac{r.s.h.n.x}{c.h.n.x} = r.\left(\frac{(r+t.h.x)^n - (r-t.h.x)^n}{(r+t.h.x)^n + (r-t.h.x)^n}\right)$, & parce que $t.h.x : r :: r$: cot. $h.x$, l'on a cot. $h.n.x = \frac{r^2}{t.h.n.x}$; donc l'on aura la formule ſuivante, cot. $h.n.x = r.\left(\frac{(r+t.h.x)^n + (r-t.h.x)^n}{(r+t.h.x)^n - (r-t.h.x)^n}\right)$. Par de ſemblables ſubſtitutions, l'on trouvera pour le cercle, tang. $nx =$

$$\frac{r}{\sqrt{(-1)}}\left(\frac{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n - \left(r-\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n}{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n + \left(r-\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n}\right)$$

$$\text{cot}.nx = \frac{r.\sqrt{(-1)}.[(r+\sqrt{-1}.\text{tang}.x)^n + (r-\sqrt{-1}.\text{tang}.x)^n]}{\left(r+\sqrt{(-1)}.\text{tang}.x\right)^n - \left(r-\sqrt{(-1)}\text{tang}.x\right)^n}$$

44. PROBLEME. *Trouver l'intégrale des formules* $\frac{ch.x.d.s.hx - s\,h.x\,d.ch.x}{r}$, $\frac{cos.x.d\,sin.x - sin.x d.\,cos.x}{r}$.

Dans la ſeconde x déſigne un arc de cercle dont le rayon $= r$.

Je dis que S. $\frac{c\,h.x\,d.s.h.x - s.h.x.d.c\,h.x}{r} = x$, x déſignant un logarithme hyperbolique ſimple, & S. $\frac{cos.x\,d\ sin.x - sin.x\,d.\,cos.x}{r} = x$, x étant un arc de cercle dont le rayon $= r$. Dans l'hyperbole équilatere (Fig. 8.), le ſecteur CAM diviſé par $\frac{r}{2}$ donne le logarithmique hyperbolique ſimple * correſpondant au ſinus PM (voyez la ſection précédente 21); donc le logarithme x multiplié par $\frac{r}{2}$, ou $\frac{rx}{2} =$ CAM; or CAM eſt égal au triangle CMP moins le demi-ſegment APM, lequel demi-ſegment en faiſant CP $=$ $c.h.x$, & PM $= s\,h$, ſera $=$ S. $s.h.x.d.c.h.x$; donc $\frac{rx}{2} = \frac{c.h.x.s.h.x}{2}$ — S. $s.h.x.d.c.h.x$; donc en différenciant les deux membres de l'équation, réduiſant & diviſant par $\frac{r}{2}$ l'on a (A) $dx = \frac{c.h.x.d.s.h.x - s.h.x.d.c.h.x}{r}$; donc &c.

Dans le cercle (Fig. 2) en faiſant CA $= r$, l'arc AM $= x$, le ſecteur CAM $= \frac{rx}{2} =$ au triangle CPM + le demi-

* C'eſt évidemment des logarithmes hyperboliques ſimples dont il s'agit ici.

ſegment

ſegment APM, ſera $= \frac{\text{cof. } x \text{ fin. } x}{2} + \text{S.} - \text{fin. } x \,.\, d.\, \text{cof. } x.$

On met le ſigne — parce que le ſecteur croiſſant, le cosinus décroît; de ſorte que ſa différentielle eſt négative.

Donc en différenciant, réduiſant & diviſant par $\frac{r}{2}$,

on a $d\,x = \frac{\text{cof. } x \,.\, d.\, \text{fin. } x - \text{fin. } x \,.\, d\, \text{cof. } x}{r}$; donc &c.

5. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{d\,.\,x\,.\,ch.\,x}{r}$; $\frac{d\,x\,.\,s.h.\,x}{r}$; $\frac{d\,x\,\text{cof. } x}{r}$; $\frac{-d\,x\,\text{fin. } x}{r}$.

On a S. $\frac{dx\,.\,ch.\,x}{r} = s\,h.x$; S. $\frac{dx.s\,h.x}{r} = c\,h.x$; S. $\frac{x\,.\,\text{cof. } x}{r} = \text{fin. } x$; S. $\frac{-d\,x\,.\,\text{fin. } x}{r} = \text{cof. } x$. Car dans l'hyperbole $(c\,h\,.\,x)^2 = r^2 + (s\,h\,.\,x)^2$; donc en différenciant, $ch.x.d.\,ch\,x = s\,hx\,.\,d.\,s\,h.\,x$ ou $d.c.hx = \frac{s\,hx\,.\,\text{fin. } h.x}{c\,h.x}$, & $d\,.\,s\,h\,.\,x = \frac{ch\,.\,x\,.\,d\,.\,ch\,.\,x}{s\,h\,\,x}$. Ces valeurs étant ſucceſſivement ſubſtituées dans la formule A (44), donnent $r\,dx = c\,h\,.\,x\,.\,ds\,h.x - \frac{(sh\,.\,x)^2}{c\,h\,.\,x}\,.\,d\,s\,h\,.\,x$, $r\,d\,\ldots = \frac{(ch\,.\,x)^2}{s\,h\,.\,x}\cdot d\,.\,c\,h\,.\,x - s\,h\,.\,x\,.\,d\,.\,ch\,.\,x$ ou $r\,\ldots x = \frac{d\,.\,s\,h\,.\,x}{ch\,.\,x}\Big((c\,h\,.\,x)^2 - s\,h\,.\,x)^2\Big)$, $r\,dx = \ldots\,h\,.\,x}{h\,.\,x}\Big((ch\,.\,x)^2 - (s\,ch.x)^2\Big)$ ou $r\,dx = \frac{d\,.\,sh\,.\,x}{c\,h\,.\,x}\,r^2$; $\ldots x = \frac{d\,.\,ch\,.\,x}{s\,\,h\,.\,x}\cdot r^2$ (parce que $(ch.x)^2 - (s\,h.x)^2 = r^2$) ou $d\,.\,s\,.\,h\,.\,x = \frac{dx\,ch\,.\,x}{r}$; $d\,.\,c\,h\,.\,x = \frac{dx\,.\,sh\,.\,x}{r}$; donc

$s\,h.\,x = S.\frac{dx.ch.x}{r}$; $ch.x = S.\frac{dx.sh.x}{r}$. Dans le cercle (Fig. 2), l'on a CM : MP :: Mm : mn, CM : CP :: Mm : Mn, ou r : sin. x :: dx : $-d.\cos.x$; r : cos. x :: dx : $d.$ sin. x; donc $d.\cos.x = \frac{-dx.\sin.x}{r}$, & $S.\frac{-dx.\sin.x}{r} = \cos.x$; $d.\sin.x = \frac{dx.\cos.x}{r}$, & $S.\frac{dx.\cos.x}{r} = \sin.x$.

46. PROPOSITION. *L'on a toujours les quatre théorêmes suivans.*

$$m.\,S.\,(ch.x)^m.dx = (m-1)r^2\,S.\,(ch.x)^{m-2}\,dx + r(ch.x)^{m-1}\,sh.x.$$

$$m.\,S.\,(s.h.x)^m\,dx = -(m-1)r^2\,S.(sh.x)^{m-2}\,dx + r(shx)^{m-1}\,ch.x.$$

$$m.\,S.(\cos.x)^m\,dx = (m-1)r^2\,S.\,(\cos.x)^{m-2}\,dx + r.(\cos.x)^{m-1}\,\sin.x.$$

$$m.\,S.(\sin.x)^m\,dx = (m-1)r^2\,S.(\sin.x)^{m-2}\,dx - r.(\sin.x)^{m-1}\cos.x.$$

Pour démontrer le premier théorême, je remarque que $d.[(ch.x)^{m-1}\,sh.x] = (m-1).(ch.x)^{m-2}\,sh.x \times d.ch.x + (ch.x)^{m-1}\,d.sh.x$. Substituant les valeurs de $d.ch.x$, $d.sh.x$ qu'on vient de trouver (45), & $(ch.x)^{m-2}\frac{sh.x^2}{r^2}$ au lieu de $(sh.x)^2$, & multipliant tout par r, il vient $r\,d.[(ch.x)^{m-1}\,sh.x)] = (m-1).(ch.x)^m.dx - (m-1).r^2(ch.x)^{m-2}\,dx + (ch.x)^m\,dx$; donc $m.(c.h.x)^m\,dx = (m-1)r^2 \times (ch.x)^{m-2}\,dx + r\,d.[(ch.x)^{m-1}\,sh.x)]$; donc en intégrant, $S.m(ch.x)^m dx = (m-1).r^2\,S.(ch.x)^{m-2}\,dx + r.(ch.x)^{m-1}\,s.h.x$.

Le ſecond théorême ſe démontre par la formule $d.[(s.h.x)^{m-1} ch.x] = (m-1).s.(h.x)^{m-1} ch.x.d.sh.x + (sh.x)^{m-1} d.ch.x$. En faiſant les mêmes ſubſtitutions que nous venons de faire, excepté que nous ſubſtituerons la valeur de $(ch.x)^2 = r^2 + (sh.x)^2$ au lieu de celle de $(sh.x)^2$, nous parviendrons à la formule $rd.[(sh.x)^{m-1} ch.x] = (m-1).r^2 (sh.x)^{m-2} dx + (m-1).(sh.x)^m dx + (sh.x)^m dx$; donc en réduiſant, tranſpoſant & intégrant, $m.S.(sh.x)^m dx = -[(m-1).r^2 S.(sh.x)^{m-2} dx] + r(sh.x)^{m-1} ch.x$.

Pour démontrer le troiſième théorême, je me ſers de la formule $d.(cos.x)^{m-1} sin.x = (m-1).(cos.x)^{m-2} \times sin.x.d\,cos.x + (cos.x)^{m-1} d\,sin.x$. Subſtituez les valeurs de $d\,cos.x$, $d.sin.x$, trouvées ci-deſſus (45), écrivez $r^2 - (cos.x)^2$ au lieu de $(sin.x)^2$, & multipliant par r, il viendra $rd[(cos.x)^{m-1} sin\,x] = -(m-1)r^2 \times (cos.x)^{m-2} dx + (m-1).(cos.x)^m dx + (cos.x)^m dx$; donc $m.S\,(cos.x)^m dx = (m-1)r^2.S.(cos.x)^{m-2} dx + r(cos.x)^{m-1} sin.x$.

Le quatrième théorême ſe démontre facilement par la formule $d\,[(sin.x)^{m-1} cos.x] = (m-1).(sin.x)^{m-2} \times cos.x.d.sin.x + (sin.x)^{m-1} d.cos.x$. Si l'on ſubſtitue les valeurs de $d.cos.x$, $d.sin.x$, & celle de $(cos.x)^2 = r^2 - (sin.x)^2$, & qu'on s'y prenne comme dans le cas précédent, l'on trouvera $m.S.(sin.x)^{m-2} dx = (m-1)r^2 \times S.(sin.x)^{m-2} dx - r.(sin.x)^{m-1} cos.x$.

47. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{r\,dx}{(ch.x)^2}$, $-\frac{r\,dx}{(sh.x)^2}$, $\frac{r\,dx}{(cos.x)^2}$, $-\frac{r\,dx}{(sin.x)^2}$. L'on a $S.\frac{r.dx}{(ch.x)^2} = \frac{sh.x}{ch.x}$. Cela ſuit du premier théorême; car en ſuppoſant $m = 0$, il en réſulte l'équation $0 =$

$-1 : r^2 S.(ch.x)^{-2} dx + r.(ch.x)^{-1} sh.x$; donc $rS.\frac{dx}{(ch.x)^2} = \frac{sh.x}{ch.x}$. Par le second théorême, l'on a dans ce cas, $-rS.\frac{dx}{(sh.x)^2} = \frac{ch.x}{sh.x}$. Le troisième donne $rS.\frac{dx}{(\text{cos}.x)^2} = \frac{\text{sin}.x}{\text{cos}.x}$, & le quatrième fait voir que $-rS.\frac{dx}{(\text{sin}.x)^2} = \frac{\text{cos}.x}{\text{sin}.x}$.

48. PROBLEME. *Intégrer les formules* $ch.x.dx$; $s.hx.dx$; $\text{cos}.x.dx$; $\text{sin}.x\,dx$. Si dans les quatre théorêmes ci-dessus, l'on fait $m = 1$, ou $m - 1 = 0$, l'on aura $S.ch.x\,dx = rsh.x$; $S.sh.dx = r.ch.x$; $S.\text{cos}.x\,dx = r\,\text{sin}.x$; $S.\text{sin}.x.dx = -r\,\text{cos}.x$.

On voit aussi facilement qu'en faisant $m = 2$ dans les mêmes théorêmes ci-dessus, ou $m - 2 = 0$; à cause de $S.(ch.x)^{m-2} dx = S.dx = x$, le premier théorême donnera $2S.(ch.x)^2 dx = r^2 x + r\,ch.x.sh.x$. Il est aisé de voir que le second théorême donne $2S.(sh.x)^2 dx = -r^2 x + r\,sh.x.ch.x$. Par le troisième théorême l'on a $2S.(\text{cos}.x)^2 dx = r^2 x + r\,\text{cos}.x.\text{sin}.x$. Et par le quatrième, l'on trouve $2S.(\text{sin}.x)^2 dx = r^2 x - r.\text{sin}.x.\text{cos}.x$.

49. PROBLEME. *Intégrer les formules* $\frac{dx}{ch.x}$; $\frac{dx}{sh.x}$; $\frac{dx}{\text{sin}.x}$; $\frac{dx}{\text{cos}.x}$. Nous avons trouvé ci-dessus (45) l'équation $r\,dx = \frac{d.sh.x}{ch.x}\,r^2$, d'où l'on tire $dx = \frac{r\,d.sh.x}{ch.x}$. Substituant cette valeur de dx dans la premiere formule & multipliant par r, l'on trouve $\frac{rr.d.sh.x}{(ch.x)^2} = \frac{r^2.d.sh.x}{r^2+(sh.x)^2}$. L'intégrale de cette formule est égale à un arc de cercle AM (Fig. 2), dont la tangente $Ab = sh.x$. Cela suit de ce que par la

ſection précédente (31), $\frac{aadx}{aa+xx}$ eſt l'élément d'un arc de cercle dont le rayon $=a$, & la tangente x; donc ſi le rayon $=r$ & la tangente $=sh.x$, l'élément de l'arc ſera $=\frac{rrd.sh.x}{r^2+(sh.x)^2}$; & partant S. $\frac{dx}{eh.x}$ $=\frac{AM}{r}$.

Nous avons encore trouvé (45), $rdx=\frac{d.ch.x}{sh.x}r^2$; donc $dx=\frac{r.dch.x}{sh.x}$; donc $\frac{rdx}{shx}=\frac{r^2.dch.x}{(sh.x)^2}$ $=$ $\frac{rrd.eh.x}{(ch.x)^2-r^2}$.

Si dans une hyperbole équilatère dont le demi-axe CA $=r$, l'on prend la co-tangente BD (Fig 9) $=ch.x=$CP (Fig. 8), & que par les points C & D, on tire la ligne CM, le ſecteur CAM diviſé par $\frac{r}{2}$ ou le logarithme hyperbolique ſimple, ſera $=$ S. $\frac{-r^2d.ch.x}{(ch.x)^2-r^2}$. Cela ſuit de ce que l'on a vu dans la ſection précédente (21), que lorſque le demi-axe de l'hyperbole équilatère eſt $=a$, & la co-tangente $=z$, l'élément du logarithme hyperbolique ſimple eſt $=\frac{-a^2dz}{zz-aa}$; donc l'intégrale cherchée (n'ayant pas égard au ſigne) eſt égale au ſecteur CAM diviſé $\frac{r}{2}$ & par r, ou eſt $=\frac{2.CAM}{rr}$. Il eſt aiſé de voir que l'hyperbole AM (Fig. 9), dont on ſe ſert pour intégrer eſt la même que l'hyperbole AM (Fig. 8), dans laquelle on prend $ch.x$.

Pour intégrer la troiſième formule, je remarque que nous avons trouvé ci-deſſus (45), la proportion $r:$ ſin. $x::dx:-d$ cof. x; donc $dx=-\frac{r.d.\text{cof.}x}{\text{ſin.}x}=$ $\frac{-1.d.\text{cof.}x}{\text{ſin.}x}$, en faiſant $r=1$, & alors $\frac{dx}{\text{ſin.}x}=$

$\frac{-d.\text{cof. } x}{(\text{fin. } x)^2}$. En faiſant le rayon $= r$, on a $\frac{r\,dx}{\text{fin. } x} = \frac{-r^2\,d.\text{cof. } x}{(\text{fin. } x)^2} = \frac{-\frac{1}{2}r\,d.\text{cof. } x}{r-\text{cof. } x} - \frac{-\frac{1}{2}r\,d.\text{cof. } x}{r+\text{cof. } x}$, & en faiſant $r=1$, S. $\frac{1\,dx}{\text{fin. } x} = \frac{1}{2}$ L. $\frac{1-\text{cof. } x}{1+\text{cof. } x} = \frac{1}{2}$ L.(tangente)$^2\,\frac{1}{2}x$ $=$ L. tangente $\frac{1}{2}x$. En effet, en ſuppoſant $r=1$, l'on verra aiſément que $\frac{1-\text{cof. } x}{1+\text{cof. } x} = (\text{tangente})^2.\,\frac{1}{2}x$, comme il ſuit de la formule $\frac{1-\text{cof. } m}{1+\text{cof. } m} = (\text{tang.})^2\,\frac{1}{2}m$, qu'on a donnée dans la premiere partie de cet ouvrage (Géomét. 170) ; or la différentielle logarithmique de $\frac{1-\text{cof. } x}{1+\text{cof. } x}$ ſe trouve en diviſant la différentielle de cette quantité par la quantité elle-même, ce qui donne $\frac{-2\,d.\text{cof. } x}{1-(\text{cof. } x)^2}$; ainſi $-\frac{d.\text{cof. } x}{1-(\text{cof. } x)^2}$ n'eſt que la moitié de cette différentielle.

Il eſt facile maintenant d'intégrer les formules $\frac{a.dx}{\text{fin. } x}$, $\frac{a\,dx+b\,dx}{\text{fin. } x}$, $\frac{a\,dx-b\,dx}{\text{fin. } x}$. Soit en ſuppoſant le rayon du cercle (dans lequel on prend l'arc x) $= 1$ ou $= r$. Car il eſt viſible que la grandeur du rayon ne peut faire de difficulté. En général dès qu'on ſait trouver la différentielle logarithmique de $r\,r.\left(\frac{r-\text{fin. } x}{r+\text{cof. } x}\right)$, on peut facilement avoir l'intégrale de $\frac{B\,dx}{\text{fin. } x}$, B étant une quantité conſtante, & le rayon de l'arc x étant ſuppoſé $= r$.

n étant l'arc de 90 degrés, & r le rayon du cercle, on a (voyez la Géométrie N° 139.) $(\text{tang.})^2 . \left(\frac{n+x}{2}\right) = rr . \left(\frac{r+\text{sin.}\,x}{r-\text{sin.}\,x}\right)$. Donc en faiſant $r = 1$, l'on trouvera L. tang. $\left(\frac{n+x}{2}\right)$ = L. 1 . 1 + L. $(1+\text{sin.}\,x)$ — L. $(1-\text{sin.}\,x)$. Mais en ſuppoſant toujours $r = 1$, l'on a $dx = \frac{d.\,\text{sin.}\,x}{\text{cos.}\,x}$, & $\frac{dx}{\text{cos.}\,x} = \frac{d.\,\text{sin.}\,x}{(\text{cos.})^2 x} = \frac{d.\,\text{sin.}\,x}{1.1-(\text{sin.})^2 x} = \frac{\frac{1}{2} d.\,\text{sin.}\,x}{1+\text{sin.}\,x} + \frac{\frac{1}{2} d.\,\text{sin.}\,x}{1-\text{cos.}\,x} = \frac{1}{2} d.\,\text{L.}\,(\text{tang.})^2 \left(\frac{n+x}{2}\right)$; donc $\text{S.}\,\frac{dx}{\text{cos.}\,x} = \text{L. tang.}\left(\frac{n+x}{2}\right)$.

50. THEOREME. *Si m eſt un nombre entier poſitif & impair, les formules* $\text{S.}(ch.x)^m dx$; $\text{S.}(sh.x)^m dx$; $\text{S.}(\text{cos.}x)^m . dx$; $\text{S.}(\text{sin}\,x)\ dx$, *ſont éxactement intégrables.* Car elles dépendent de l'intégration d'autres formules ſemblables dans leſquelles l'expoſant eſt $m-2$, celles-ci dépendent d'autres formules ſemblables, dans leſquelles l'expoſant eſt $m-4$, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on arrive à des formules qui ont l'unité pour expoſant, leſquelles (48), ſont exactement intégrables; & comme les ſéries pour les quatre formules ſuivent la même loi, il ſuffira de faire voir comment on peut avoir la ſérie qui donne $\text{S.}\,(\text{cos.}\,x)^m\,dx$. nous aurons $\text{S.}\,(\text{cos.}\,x.)^m\,dx = \frac{r}{m} . (\text{cos.}\,x.)^{m-1}\,\text{sin.}\,x + \frac{(m-1)}{m} r^2\,\text{S.}\,(\text{cos.}\,x)^{m-2}\,dx$. Par la même raiſon $\text{S.}\,(\text{cos.}\,x)^{m-2}\,dx = \frac{r}{m-2}\,(\text{cos.}\,x)^{m-3}\,\text{sin.}\,x +$

$\frac{m-3}{m-2} \cdot r^2 \cdot S.\ (\text{cos.}\, x)^{m-4} dx$; $S.\ (\text{cos.}\, x)^{m-4} dx =$

$\frac{r}{m-4} \cdot (\text{cos.}\, x)^{m-5} \cdot \text{sin.}\, x + \frac{m-5}{m-4} \cdot r^2 \cdot S.\ (\text{cos.}\, x)^{m-6} dx$,

& ainſi de ſuite. Donc $S.\ (\text{cos.}\, x)^m dx = \frac{r}{m} \cdot (\text{cos.}\, x)^{m-1} \text{sin.}\, x$

$+ \frac{m-1}{m.(m-2)} \cdot r^3 (\text{cos.}\, x)^{m-3} \text{sin.}\, x + \frac{(m-1).(m-3)}{m.(m-2).(m-4)} \cdot r^5 \times$

$(\text{cos.}\, x)^{m-5} \text{sin.}\, x + \frac{(m-1).(m-3).(m-5)}{m.(m-2).(m-4).(m-6)} \cdot r^6 \times$

$S.\ (\text{cos.}\, x)^{m-6} dx$; & en procedant de même, vous aurez une ſérie dont tous les termes ſeront multipliés par $\text{sin.}\, x$, les expoſans de $\text{cos.}\, x$ ſuivent la ſérie $m-1$, $m-3$, $m-5$, & juſqu'à 0, ce qui arrive au dernier terme. Les coefficiens des termes ſeront $\frac{1}{m}$, $\frac{m-1}{m.(m-2)}$, $\frac{(m-1).(m-3)}{m.(m-2).(m-4)}$, &c. multipliés reſpectivement par les termes de la ſérie, r, r^3, r^5, &c. le dernier terme étant multiplié par r^m. Si m eſt un nombre pair poſitif, l'on parviendra à un terme qui contiendra la ſeule variable dx qui dans les deux premieres formules s'integre par le moyen de l'hyperbole, & dans les deux autres par un arc de cercle; car x eſt égal dans les premieres, à un ſecteur hyperbolique diviſé $\frac{r}{2}$, & dans les dernieres à un ſecteur circulaire diviſé par $\frac{r}{2}$ ou ce qui revient au même, eſt égal à un arc de cercle dont le rayon $= r$.

51 Pour traiter plus facilement les cas dans leſquels m eſt un nombre négatif, il eſt à propos de changer un peu les formules; & comme la même méthode a lieu pour toutes, il ſuffira de l'appliquer à la premiere. Je change le ſigne de m pour la rendre de négative poſitive, & il vient $-m.\ S.\frac{dx}{(ch.x)^m} = -(m-1).r^2 S.\frac{dx}{(ch.x)^{m+2}} +$

$\frac{r, sh. x}{(ch.x)^{m+1}}$; donc en transposant, $m+1.r^2$ S. $\frac{dx}{(ch.x)^{m+1}} =$ m. S. $\frac{dx}{(ch.x)^m} + \frac{r\,sh.x}{(ch.x)^{m+1}}$. Supposant $m+2=n$, ou $n-1=m+1$, l'on aura $(n-1)r^2$ S. $\frac{dx}{(ch.x)^n} =$ $(n-2)$ S. $\frac{dx}{(ch.x)^{n-2}} + \frac{r\,sh\,x}{(ch.x)^{n-1}}$. En opérant de même sur les autres formules, on aura $(n-1)r^2$ S. $\frac{dx}{(sh.x)^n} =$ $-(n-2)$ S. $\frac{dx}{(sh.x)^{n-2}} - \frac{r\,ch.x}{(sh.x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2$ S. $\frac{dx}{(cos.x)^n} = (n-2)$ S. $\frac{dx}{(cos.x)^{n-2}} + \frac{r\,sin.x}{(cos.x)^{n-1}}$;

$(n-1)r^2$ S. $\frac{dx}{(sin.x)^n} = (n-2)$ S. $\frac{dx}{(sin.x)^{n-2}} - \frac{r\,cos.x}{(sin.x)^{n-1}}$

COROLAIRE. Si n est pair, il est visible que les formules S. $\frac{dx}{(ch.x)^n}$, S $\frac{dx}{(sh.x)^n}$, S. $\frac{dx}{(cos.x)^n}$, S. $\frac{dx}{(sin.x)^n}$, sont exactement intégrables; car il suit de ce qu'on vient de dire que ces formules dépendent d'autres formules semblables, dans lesquelles l'exposant est $n-2$, & celles-ci dépendent d'autres formules dans lesquelles l'exposant est $n-4$ & ainsi de suite, jusques à ce que l'exposant soit 2; or l'on a vu ci-dessus que ces derniers sont exactement intégrables. Si n est impair, on prouvera par un raisonnement semblable, que les formules dont on vient de parler, dépendent de celles-ci $\frac{dx}{ch.x}$, $\frac{dx}{sin.h.x}$, $\frac{dx}{cos.x}$, $\frac{dx}{sin.x}$, dont la premiere dépend de la rectification du cercle; la seconde, de la quadrature de l'hyperbole, & les deux autres s'integrent par les logarithmes.

52. Afin de faire comprendre comment on peut intégrer les formules qui renferment à la fois des sinus & des co-sinus, nous allons établir les quatre théorêmes suivans.

$$(m+n)\,S.\,(sh.x)^{n-1}\,(ch.x)^{m+1}dx = r\,(sh.x)^{n}\,(ch.x)^{m} + m r^{2}\,S.\,(sh.x)^{n-1}\,(ch.x)^{m-1}\,dx.$$

$$(m+n)\,S.\,(ch.x)^{m-1}\,(sh.x)^{n+1}\,dx = r\,(ch.x)^{m}\,(sh.x)^{n} - n r^{2}\,S.\,(ch.x)^{m-1}\,(sh.x)^{n-1}\,dx.$$

$$(m+n)\,S.\,(\text{fin.}x)^{n-1}\,(\text{cof.}x)^{m+1}dx = r.\,(\text{fin.}x)^{n}\,(\text{cof.}x)^{m} + m r^{2}\,S.\,(\text{fin.}x)^{n-1}\,(\text{cof.}x)^{m-1}\,dx.$$

$$(m+n)\,S.\,(\text{cof.}x)^{m-1}\,(\text{fin.}x)^{n+1}\,dx = -r.\,(\text{cof.}x)^{m}\,(\text{fin.}x)^{n} + n r^{2}\,S.\,(\text{cof.}x)^{m-1}\,(\text{fin.}x)^{n-1}\,dx.$$

Pour démontrer les deux premiers théorêmes, je remarque que la différentielle de $\left((ch.x)^{m}(sh.x)^{n}\right)$ est $= m.(sh.x)^{n}\,(ch.x)^{m-1}\,d.ch.x + n\,(ch.x)^{m}\,(sh.x)^{n-1}\,d.sh.x$. Or $d.ch.x = \frac{dx.\,sh.x}{r}$, $d.sh.x = \frac{dx.\,ch.x}{r}$; donc en substituant, l'on aura la formule $r\,d\left((ch.x)^{m}\,(sh.x)^{n}\right) = m.\,(sh.x)^{n+1}\,(ch.x)^{m-1}\,dx + n\,(ch.x)^{m+1}\,(sh.x)^{n-1}\,dx$.

Si dans cette formule on substitue la valeur de $(sh.x)^{n+1} = (sh.x)^{n-1}.\left((ch.x)^{2} - r^{2}\right)$, l'on aura (en transposant) le premier théorême; & si au lieu de $(ch.x)^{m+1}$, l'on substitue $(ch.x)^{m-1} \times \left(r^{2} + (sh.x)^{2}\right)$, l'on aura le second théorême.

L'on a aussi $d.(\text{cof.}x)^{m}.(\text{fin.}x)^{n} = m.(\text{fin.}x)^{n} \times (\text{cof.}x)^{m-1}\,d.\text{cof.}x + n.(\text{cof.}x)^{m}.(\text{fin.}x)^{n-1}\,d.(\text{fin.}x)$.

Mais $d.\text{cof.}x = \frac{-dx.\,\text{fin.}x}{r}$, $d.\text{fin.}x = \frac{dx.\,\text{cof.}x}{r}$; donc en substituant, il viendra $r\,d.(\text{cof.}x)^{m}.(\text{fin.}x)^{n} =$

$-m.(\text{sin.}x)^{n+1}.(\text{cos.}x)^{m-1}dx+n.(\text{cos.}x)^{m+1}\times(\text{sin.}x)^{n-1}dx$.

Si au lieu de $(\text{sin.}x)^{n+1}$ l'on écrit $(\text{sin.}x)^{n-1}\times\left(r^2-(\text{cos.}x)^2\right)$, & qu'on faſſe les tranſpoſitions néceſſaires, l'on trouvera le troiſième théorême; & ſi l'on ſubſtitue $(\text{cos.}x)^{m-1}.\left(r^2-(\text{sin.}x)^2\right)$, au lieu de $(\text{cos.}x)^{m+1}$, l'on aura (en tranſpoſant) le dernier théorême.

Si n étant un nombre entier poſitif ou négatif, m eſt un nombre entier poſitif, on doit ſe ſervir du premier théorême pour les quantités hyperboliques, & du troiſième pour les quantités circulaires. Car ſi m eſt impair & $m+1$ pair, l'intégration de la formule $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m+1}dx$ dépend de l'intégrale S. $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m-1}dx$, & celle-ci dépend de S. $(sh.x)^{n-1}\times(ch.x)^{m-3}dx$, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'expoſant de $ch.x$ ſoit $=0$; ainſi l'intégrale de la formule propoſée dépend de celle de $(sh.x)^{n-1}dx=(shx)^m dx$, en faiſant $n-1=m$. Mais on peut intégrer cette formule par ce qu'on a dit ci-deſſus.

Si m eſt pair, on parviendra à une formule qui contiendra $ch.x$ ou cos. x avec l'expoſant 1; donc alors l'intégrale de la formule propoſée dépend de S. $(sh.x)^{n-1}ch.x.dx=r.$ S. $(sh.x)^{n-1}d.sh.x$, à cauſe de $ch.x.dx=rd.sh.x$, comme il ſuit, de ce qu'on a dit ci-deſſus (48). Or $r.$ S. $(sh.x)^{n-1}d.sh.x=\frac{r}{n}(sh.x.)^n$, excepté le cas de $n=0$; car alors l'intégrale eſt r L. $sh.x$. Il eſt aiſé de voir comment on doit s'y prendre pour les quantités circulaires.

Si m étant un nombre entier poſitif ou négatif, n eſt un nombre entier poſitif, on ſe ſervira du ſecond théorême pour les quantités hyperboliques, & du quatrième pour les quantités circulaires. Car par ces théorêmes, l'on démontrera que n étant impair & $n+1$ pair, la formule propoſée dépendra de S. $(ch.x)^{m-1}dx$. ou S. $(\text{cos.}x)^{m-1}dx$, qu'on peut obtenir par ce que l'on a

dit ci-dessus. Si n est pair, on réduira la proposée à $S.(ch.x)^{m-1}\ sh.x.dx$ pour les quantités hyperboliques, & à $S.(\text{cos}.x)^{m-1}\ \text{sin}.x.dx$ pour les circulaires; mais $sh.x.dx = r.dch.x$, & $\text{sin}.x\,dx = -r.d\,\text{cos}.x$, donc on réduira la proposée à une des formules $r.(ch.x)^{m-1} \times d.ch.x$, $-r.(\text{cos}.x)^{n-1}\ d.\text{cos}.x$ dont les intégrales sont $\frac{r}{m}.(ch.x)^m$, $\frac{-r}{m}(\text{cos}.x)^m$, excepté le cas de $m=0$: car alors l'on a les intégrales $r.$ L. $ch.x$, $-r.$ L. $\text{cos}.x$.

53. Pour intégrer les formules, en supposant que m & n sont tous les deux des nombres négatifs, il est à propos de changer un peu les théorêmes ci-cessus. Il suffira d'appliquer la méthode au premier, car elle est la même pour tous. En changeant les signes de m & de n, on aura

$$\left((m+n)\right)\ S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}(ch.x)^{m-1}} = \frac{r}{(sh.x)^n(ch.x)^m} - m.r^2.S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}(ch.x)^{m+1}}.$$

Donc

$$m.r^2.S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}.(ch.x)^{m+1}} = \frac{r}{(sh.x)^n.(ch.x)^m} + (m+n).S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}.(ch.x)^{m-1}}.$$

En suivant la même méthode les autres théorêmes deviendront:

$$n.r^2\,S.\frac{dx}{(ch.x)^{m+1}.(sh.x)^{n+1}} = \frac{-r}{(ch.x)^m.(sh.x)^n} - (m+n).S.\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}(ch.x)^{m-1}}.$$

$$m.r^2.S.\frac{dx}{(\text{sin}.x)^{n+1}(\text{cos}.x)^{m+1}} = \frac{r}{(\text{sin}.x)^n(\text{cos}.x)^m} + (m+n).S.\frac{dx}{(\text{sin}.x)^{n+1}(\text{cos}.x)^{m-1}}.$$

$$n.r^2.S.\frac{dx}{(\text{cof.}x)^{m+1}.(\text{fin.}x)^{n+1}} = \frac{-r}{(\text{cof.}x)^m.(\text{fin.}x)^n} + (m+n).S.\frac{dx}{(\text{cof.}x)^{m+1}.(\text{fin.}x)^{n-1}}.$$

L'on doit ſe ſervir de ces quatre théorêmes, de même que des quatre précédens: car m étant un nombre entier & poſitif, l'on doit employer le premier & le troiſième théorême. Si m eſt impair, & $m+1$ pair, l'intégration de la formule dans laquelle l'expoſant du co-ſinus eſt $m+1$, dépend de celle de la formule dans laquelle l'expoſant du co-ſinus eſt $m-1$, celle-ci dépend de celle dans laquelle l'expoſant eſt $m-3$, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que cet expoſant ſoit $=0$. Or l'intégration de cette derniere dépend de S. $\frac{dx}{(sh.x)^{m+1}}$, ou de S. $\frac{dx}{(\text{ſin.}x)^{m+1}}$, qu'on peut intégrer, par ce qu'on a dit ci-deſſus. Si m eſt pair & $m+1$ impair, il faut ſeulement pouſſer le calcul juſqu'à ce que l'expoſant du co-ſinus ſoit $=1$, ſi on le pouſſoit plus loin, de maniere que cet expoſant devînt $=-1$, l'on auroit des coefficiens $=0$, qui, en paſſant aux diviſeurs, rendroient les quantités infinies. On ſe ſervira de la même maniere du ſecond & du quatrième théorême ſi n eſt un nombre entier poſitif. Car ſi n eſt impair & $n+1$ pair, l'on arrivera à une formule dans laquelle l'expoſant du ſinus ſera $=0$, & l'on aura une formule qui contiendra dx diviſé par la puiſſance $m+1$ du co-ſinus, formule qu'on ſait maintenant intégrer. Si n eſt pair, l'on parviendra à une formule dans laquelle l'expoſant du ſinus eſt $=1$; on ne doit pas aller plus loin, à cauſe des diviſeurs $=0$.

54. On voit donc comment on peut procéder lorſque l'un des nombres m, n, eſt impair. Si l'un & l'autre étoit pair, dans ce cas, par le premier & le troiſième théorême, on parviendra aux formules $\frac{dx}{(sh.x)^{n+1}\,ch.x}$, $\frac{dx}{(\text{ſin.}x)^{n+1}\,\text{cof.}x}$. On réduira enſuite (par le ſecond & le quatrième théorême) l'intégration de ces formules à

l'intégration des formules $\frac{dx}{sh.x.ch.x}$, $\frac{dx}{\text{fin.}x.\text{cof.}x}$, Il eſt donc à propos de chercher l'intégrale de ces dernieres formules. Je cherche premierement l'intégrale de la formule $\frac{r^2 dx}{sh.x.ch.x}$. Je ſubſtitue au lieu de r^2, ſa valeur $(ch.x)^2 - (sh.x)^2$, ce qui donne $\frac{r^2 dx}{sh.x.ch.x} = \frac{dx.(ch.x)^2 - dx.(sh.x)^2}{sh.x.ch.x} = \frac{dx.ch.x}{sh.x} - \frac{dx.sh.x}{ch.x}$. Mais $dx.ch.x = r\,d.sh.x$. & $dx.sh.x = r\,d.ch.x$; donc $S.\frac{r^2 dx}{ch.x.sh.x} = r.S.\frac{d.sh.x}{sh.x} - r.S.\frac{d.ch.x}{ch.x} = r\,L.sh.x - r\,L.ch.x$, & $S.\frac{dx}{sh.x.ch.x} = + \frac{r\,L.sh.x - r\,L.ch.x}{r^2} = \frac{1}{r} L.\frac{sh.x}{ch.x}$.

Venons à la formule $\frac{r^2 dx}{\text{fin.}x.\text{cof.}x} = \frac{dx.(\text{cof.}x)^2 + dx.(\text{fin.}x)^2}{\text{fin.}x.\text{cof.}x}$ (à cauſe de $r^2 = (\text{cof.}x)^2 + (\text{fin.}x)^2$) $= \frac{dx.\text{cof.}x}{\text{fin.}x} + \frac{dx.\text{fin.}x}{\text{cof.}x}$. Mais $dx.\text{cof.}x = r.d\,\text{fin.}x$, & $dx.\text{fin.}x = -r.d\,\text{cof.}x$; donc $\frac{r^2 dx}{\text{fin.}x.\text{cof.}x} = \frac{r\,d.\text{fin.}x}{\text{fin.}x} - \frac{r\,d.\text{cof.}x}{\text{cof.}x}$; donc en intégrant & diviſant par r^2 l'on aura $S.\frac{dx}{\text{fin.}x.\text{cof.}x} = \frac{1}{r} L.\frac{\text{fin.}x}{\text{cof.}x}$.

DE L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

55. Soit la fraction $\frac{x^4\,dx}{x^2-4}$. En divisant le numérateur par le dénominateur, autant que cela ce pourra, l'on réduit la fraction proposée à la différentielle, $x^2\,dx + 4\,dx + \frac{16\,dx}{x^2-4}$, dont l'intégrale $= \frac{x^3}{3} + 4x + 4\,\mathrm{L.}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$. L'on voit par-là qu'on peut toujours parvenir à une fraction dans laquelle l'exposant de la variable dans le dénominateur soit plus grand que dans le numérateur, & cela en divisant le numérateur par le dénominateur, autant qu'il est nécessaire. Ainsi nous supposerons dans la suite que les fractions ont cette condition.

Si la variable avoit quelque exposant négatif, on pourroit le rendre positif en multipliant le numérateur & le dénominateur par l'inconnue élevée à un exposant positif, égal au plus grand exposant négatif. Ainsi dans la fraction $\frac{ax^{-3}\,dx + x\,dx}{bx^{-4} - x^2}$, on rendra tous les exposans négatifs en multipliant le numérateur & le dénominateur par x^4, & l'on aura $\frac{ax\,dx + x^5\,dx}{b - x^6}$; l'on pourra donc supposer que tous les exposans de la variable sont positifs, puisqu'on peut facilement les rendre tels.

Si l'on avoit une fraction $\frac{ax^n dx}{(x^p + bx^q + g)^m}$, on la rendroit rationnelle, pourvu que m fût un nombre entier positif. Car si n est entier & positif, il suffit de chercher une série arithmétique qui comprenne tous les exposans du dénominateur, parmi lesquels on en suppose de fractionnaires. Si n étoit fractionnaire, la série devroit encore comprendre l'exposant n.

Soit la formule $\frac{x^2 dx}{x^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{1}{3}} + b}$, je réduis les exposans $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, & je vois facilement que la série $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0$, est la série cherchée. Je prends le terme $\frac{1}{6}$ le plus près de 0, & je fais $x^{\frac{1}{6}} = z$; donc $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$, $x^2 = z^{12}$; de sorte que la formule proposée devient $= \frac{6z^{17} dz}{z^3 + az^2 + b}$, qui est rationnelle. En général, si le terme de la série le plus approchant de 0 est $\frac{p}{q}$, on fera $x^{\frac{1}{q}} = z^p$ ou $x^p = z^{pq}$. Si l'on avoit la formule irrationnelle $\frac{x^2 dx}{x^{\frac{4}{3}} + ax^{\frac{2}{3}} + b}$, on verroit aisément que la série arithmétique qui renferme tous les exposans du dénominateur, est $\frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0$; c'est pourquoi en faisant $x^{\frac{2}{3}} = z_2$ (on fait $x^{\frac{2}{3}} = z^2$ & non pas $= z$, parce que $\frac{2}{3} = \frac{p}{q}$ fait voir que $p = 2$), l'on

l'on aura $x = z^3$, $x^2 = z^6$, $x^{\frac{4}{3}} = z^4$, & $dx = 3z^2\,dz$; donc la formule proposée deviendra $\frac{3z^8\,dz}{z^6 + az^4 + b}$, fraction rationnelle.

Soit la fraction $\frac{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}{\left(x^{\frac{1}{3}} + ax^{\frac{1}{6}} + b\right)^m}$, la série qui comprend tous les exposans du numérateur & du dénominateur est $\frac{15}{30}.\frac{14}{30}.\frac{13}{30}\ldots\frac{1}{30}.0$. Je fais $x^{\frac{1}{30}} = z$, ou $x = z^{30}$, $dx = 30\,z^{29}\,dz$, &c. & la formule proposée devient $\frac{30z^{14}\,dz}{(z^{10} + az^6 + b)^m}$, fraction rationnelle.

On peut voir par-là qu'il est facile de rendre rationnelles les fractions qui sont dans le cas de celles dont vient de parler.

On voit aussi que l'intégrale de la formule $\frac{a\,dz}{b+z}$ ou $\frac{dz}{b+z}$ (car la constante a ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration) dépend des logarithmes; de sorte que $S.\frac{dz}{b+z} = L.(b+z)$ & $S.\frac{a\,dz}{b+z} = a\,L.(b+z)$. L'on a aussi $S.\pm\frac{dx}{x\pm b} = \pm L.(x \pm b)$. Mais si x étoit $< b$, parce que ainsi qu'on l'a remarqué à la fin de la premiere partie de cet ouvrage, le logarithme d'une quantité négative est imaginaire, du moins ainsi le prétendent de très-

grands Géomètres, & qu'on eût la formule $\pm \frac{dx}{x-b}$, on écriroit $\mp \frac{dx}{b-x}$, en changeant tous les signes, & l'on auroit S. $\pm \frac{dx}{x-b}$ = S. $\mp \frac{dx}{b-x}$ = $\pm$ L. $(b-x)$. La formule $\frac{2zdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} + \frac{dz}{z-b}$, a pour intégrale L. $(b+z)$ + L. $(z-b)$. La formule $\frac{-2}{b} \cdot \frac{bbdz}{zz-bb} = \frac{dz}{z+b} - \frac{dz}{z-b}$, a pour intégrale L. $\frac{z+b}{z-b}$, & la formule $\frac{2bdz}{bb-zz} = \frac{dz}{b+z} + \frac{dz}{b-z}$, a pour intégrale L. $(bb-zz)$.

La fraction $\frac{2azdz}{zz+bb}$ a pour intégrale a L. $(zz+bb)$. L'intégrale de la fraction $\frac{dz}{zz+bb} = \frac{1}{b^2} \times \frac{bbdz}{zz+bb}$ est $= \frac{1}{b^2} \cdot f$, f étant un arc de cercle dont la tangente $= z$ & le rayon $= b$. L'intégrale S. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$, comme il est aisé de le vérifier en repassant de l'intégrale à la différentielle. Mais $\frac{dy}{1+y^2}$ est la différentielle d'un arc dont le rayon $= 1$ & la tangente $= y$, ainsi cette intégrale qui se présente sous une forme imaginaire, est cependant très-réelle. Mais l'arc dont la tangente $= x$ & le rayon $= 1$, est $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ — &c. (sec-

tion 2e. n°. 31). Donc la somme de la série $x - \frac{x^3}{3} +$ &c. est $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{L.} \left(\frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}\right)$. Si dans la fraction $\frac{a\,x\,dx}{x^2 + cx + g}$ on fait $x + \frac{1}{2}c = z$ ou $x = z - \frac{1}{2}c$, pour avoir $dx = dz$ & $x^2 + cx + g = z^2 - cz + \frac{1}{4}c^2 + cz - \frac{1}{2}c^2 + g = z^2 - \frac{1}{4}c^2 + g = z^2 + b^2$, en faisant $g - \frac{1}{4}c^2 = b^2$; il est visible qu'elle deviendra $\frac{az\,dz - \frac{1}{2}acdz}{zz + bb} = \frac{a\,z\,dz}{zz + bb} - \frac{\frac{1}{2}acdz}{zz + bb}$, fraction qu'il est maintenant facile d'intégrer, que bb soit une quantité positive, ou négative, en faisant attention que $\frac{-bb\,dz}{zz + bb}$ est la différentielle d'un arc de cercle dont la co-tangente $= z$.

Si on avoit une fraction de cette forme $\frac{a\,x\,dx + f\,dx}{x^2 + cx + g}$, par la même substitution de $z = x + \frac{1}{2}c$, on la réduiroit en deux autres, dont l'une seroit de la forme $\frac{A\,z\,dz}{zz + bb}$, & l'autre de la forme $\frac{B.\,dz}{zz + bb}$, qui sont faciles à intégrer.

56. *La formule* $\frac{x^n\,dx}{(x+a)^m}$, *peut s'intégrer facilement par la méthode suivante.* Je prends la différentielle de la formule $\frac{x^q}{(x+a)^p}$, de cette manière $d.\frac{x^q}{(x+a)^p} = \frac{q\,x^{q-1}\,dx}{(x+a)^p} - \frac{p\,x^q\,dx}{(x+a)^{p+1}}$ (en considérant successivement le numérateur & le

dénominateur comme variables) ; donc

$$\text{S.}\frac{x^q\,dx}{(x+a)^{p+1}} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{x^q}{(x+a)^p} + \frac{q}{p}\times \text{S.}\frac{x^{q-1}\,dx}{(x+a)^p}.$$

Dans cette formule, je suppose d'abord $q = n$, $p+1 = m$, & j'ai

$$\text{S.}\frac{x^n\,dx}{(x+a)^m} = \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\,\text{S.}\frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-1}}.$$

Faisons maintenant $q = n-1$, $p+1 = m-1$, pour avoir

$$\text{S.}\frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-1}} = \frac{-1}{m-2}\cdot\frac{x^{n-1}\,dx}{(x+a)^{m-2}} + \frac{n-1}{m-2}\,\text{S.}\frac{x^{n-2}\,dx}{(x+a)^{m-2}}.$$

En faisant $q = n-2$, & $p+1 = m-2$, on aura facilement la valeur de $\text{S.}\frac{x^{n-2}\,dx}{(x+a)^{m-2}}$, & ainsi de suite ; de sorte que

$$\text{S.}\frac{x^n\,dx}{(x+a)^m} = \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{x^n}{(x+a)^{m-1}} - \frac{n}{(m-1).(m-2)}\cdot\frac{x^{n-1}}{(x+a)^{m-2}} - \frac{n.(n-1)}{(m-1).(m-2).(m-3)}\cdot\frac{x^{n-2}}{(x+a)^{m-3}} \cdots + \frac{n.(n-1).(n-2)\cdots 1}{(m-1).(m-2).(m-3)\cdots(m-n)}\,\text{S.}\frac{dx}{(x+a)^{m-n}}.$$

Si $m-n = 1$, $\text{S.}\frac{dx}{(x+a)^{m-n}}$ sera $= \text{L.}(x+a)$;

si $m-n=u$, alors $S.\frac{dx}{x+a^{m-n}} = S.\frac{dx}{(x+a)^n} = S.dx.(x+a)^{-n} = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1}$ Si n est $=m$ ou $>m$, on poussera seulement le calcul jusqu'à ce que l'exposant du dénominateur soit $=1$, & le dernier terme sera alors $\frac{n.(n-1).(n-2)..(n-m+1)}{(m-1).(m-2).(m-3)...1} \times S.\frac{x^{-m+1}dx}{x+a}$. Supposant $x^{n-m+1} = x^n$, & divisant x^n par $x+a$, jusqu'à ce que la division ne soit plus possible, on aura une suite de termes de cette forme, $x^{-1}dx + Ax^{n-2}dx$, &c. Et le dernier terme sera de cette forme $\frac{B\,dx}{x+a}$; or tous ces termes sont intégrables algébriquement, excepté le dernier qui s'intégre par les logarithmes. Si n étoit négatif, on pousseroit le calcul jusqu'à ce que l'exposant de $x+a$ fût $=1$, & l'on changeroit le signe de n.

Nous n'avons pas supposé dans cet exemple, que la fraction soit pure, c'est-à dire que l'exposant de la variable dans le numérateur soit plus petit que dans le dénominateur.

57. Soit la formule $\frac{dx}{x^n(xx+ga)}$ (a étant une quantité positive, & g étant positif, ou négatif comme on voudra) $= \frac{dx}{ga.x^n + x^{n+2}}$. Par une continuelle division, on trouve $\frac{dx}{ga.x^n} - \frac{dx}{g^2a^2x^{n-2}} + \frac{dx}{g^3a^3x^{n-4}}$ &c.

Si n eſt un nombre pair, le dernier terme qu'on doit ajouter ſera $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}.(xx+ga)} = \frac{1}{b^n}, \frac{dx}{xx+bb}$, en ſuppoſant $ga = bb$. Mais l'on a S. $\frac{bb\,dx}{xx+bb} = f$, f étant un arc de cercle dont la tangente $= x$ & le rayon $= b$. On a auſſi S. $\frac{-2b\,dx}{xx-bb} =$ S. $\frac{dx}{x+b}$ — S. $\frac{dx}{x-b} =$ L. $\frac{x+b}{x-b}$; ainſi la formule $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}.(xx+ga)}$ dépend, ou de la rectification du cercle, ou des logarithmes. Le ſigne + a lieu ſi n eſt pairement pair, ou un nombre de la ſérie, 4, 8, 12 &c. Mais on doit ſe ſervir du ſigne — ſi n eſt impairement pair, ou de la ſérie 2, 6, 10, 14 &c. Si n eſt impair, il faudra pouſſer le calcul juſqu'à ce que l'on parvienne à ces deux termes $\pm \frac{dx}{g^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x} \mp \frac{x\,dx}{g^{\frac{n-1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} (xx+ga)}$; qui s'intégrent tous les deux par les logarithmes. On ſe ſervira des ſignes ſupérieurs, ſi n eſt contenu dans la ſérie 1, 5, 9, 13 &c. mais les ſignes inférieurs auront lieu ſi n eſt un des nombres de la ſérie 3, 7, 11, 15 &c.

58. Soit la fraction $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m}$, à cauſe qu'en développant le dénominateur on y trouve le terme

($x^m x^m = x^{2m}$, il eſt néceſſaire que $n < 2m$; de plus nous ſuppoſons que n & m ſont poſitifs & entiers. Cela poſé, il eſt aiſé de voir que $d.\frac{x^q}{(xx+ga)^p} = \frac{qx^{q-1}dx}{(xx+ga)^p} - \frac{2px^{q+1}dx}{(xx+ga)^{p+1}}$; donc $S.\frac{x^{q+1}dx}{(xx+ga)^{p+1}} = \frac{-1}{2p}\cdot\frac{x^q}{(xx+ga)^p} + \frac{q}{2p}S.\frac{x^{q-1}dx}{(xx+ga)^p}$. Suppoſez maintenant $q+1 = n$, $p+1 = m$; donc, par l'équation qu'on vient de trouver, $S.\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m} = \frac{-1}{2.(m-1)}\cdot\frac{x^{n-1}}{(xx+ga)^{m-1}} + \frac{n-1}{2.(m-1)} \times S.\frac{x^{n-2}dx}{(xx+ga)^{m-1}}$. Faites $q+1 = n-2$, $p+1 = m-1$, pour avoir $S.\frac{x^{n-2}dx}{(xx+ga)^{m-1}} = \frac{-1}{2.(m-2)}\cdot\frac{x^{n-3}}{(xx+ga)^{m-2}} + \frac{n-3}{2.(m-2)}\times S.\frac{x^{n-4}dx}{(xx+ga)^{m-2}}$. En faiſant $q+1 = n-4$, & $p+1 = m-2$, on aura facilement la valeur de $S.\frac{x^{n-4}dx}{(xx+ga)^{m-2}}$, & ainſi de ſuite. L'on continuera le calcul autant qu'il ſera néceſſaire.

Si n eſt pair, on continuera juſqu'à ce que l'expoſant du diviſeur ſoit $= 1$, auquel cas le dernier terme de la ſuite contiendra $S.\frac{x^{n-2m+2}dx}{xx+ga}$, & comme $n < 2m$, l'expoſant de x dans le numérateur ſera ou $= 0$, ou négatif. Dans le premier cas l'intégrale dépend du cercle; mais dans

le second, elle s'intègre par la méthode ci-dessus (57). Si n est impair & positif, ou l'on a $n = 2m-1$, ou $n > 2m-1$ (si la fraction n'est pas pure). Dans l'un & dans l'autre cas on continuera le calcul jusqu'à ce que l'exposant du dénominateur soit $= 1$, & l'on aura au dernier terme S. $\frac{x^{n-2m+2}\,dx}{xx+ga}$. Mais dans le premier cas l'exposant de x au numérateur sera $= 1$; & l'on sait que S. $\frac{x\,dx}{xx+ga} = \text{L.}\,(xx+ga)^{\frac{1}{2}}$. Dans le second cas l'exposant du numérateur sera > 2; donc par une division continuelle, on parviendra à un terme de cette forme $\frac{B\,x\,dx}{xx+ga}$, qu'on sait intégrer par les logarithmes, & les autres termes seront intégrables algébriquement. Si $n < 2m-1$, on continuera le calcul jusqu'à ce que l'exposant de x dans le numérateur soit $= 1$, & l'on aura au dernier terme S. $\frac{x\,dx}{(xx+ga)^{\frac{2m-n-1}{2}}}$ $=$ S. $\frac{x\,dx}{(xx+ga)^q}$. q étant un nombre entier; puisque $\frac{n-1}{2}$ est entier à cause de n impair. Si $q = 1$, on intégre par les logarithmes; si $q > 1$, l'on a S. $x\,dx\,.\,(xx+ga)^{-q} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{(xx+ga)^{-q+1}}{-q+1}$. On voit aussi que S. $\frac{dx}{x^m} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, excepté le cas de $m = 1$; car alors S. $\frac{dx}{x^m} = \text{L.}\,x$.

59. Cela posé, je dis que toute fraction rationnelle pure de cette forme $\frac{ax^{m-1}dx + bx^{m-2}dx + cx^{m-3}dx + \&c.}{(x+g)^m \cdot f}$, est intégrable exactement; car en négligeant le facteur commun $\frac{1}{f}$, qui ne peut faire aucune difficulté dans l'intégration, l'on réduira la fraction proposée en autant de fractions $\frac{ax^{m-1}dx}{(x+g)^m} + \frac{bx^{m-2}dx}{(x+g)^m} + \&c.$ qu'il y a de termes au numérateur, & chacune dépend de la fraction $\frac{x^n dx}{(x+g)^m}$ * qu'on peut intégrer par la méthode ci-dessus (56).

Toute fraction rationnelle pure de cette forme, ou qu'on peut réduire à cette forme $\frac{1}{f} \cdot \frac{ax^{m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx + \&c.}{(xx+ga)^m}$ est intégrable, car elle est égale à la somme des fractions $\frac{1}{f}a.\frac{x^{2m-1}dx}{(xx+ga)^m}, \frac{1}{f}.b\frac{x^{2m-2}dx}{(xx+ga)^m}$, &c. or en faisant $m-1=n$ dans la 1re., $m-2=n$ dans la 2e., &c. L'intégrale de chacune de ces fractions dépend de S. $\frac{x^n dx}{(xx+ga)^m}$, intégrale qu'on peut trouver par ce qu'on vient de dire (58).

* Si on fait $m-1=n$, la première fraction sera $=a\frac{x^n dx}{(x+g)^m}$.

Toute fraction de cette forme

$$\frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + cx^{2m-3}dx \text{ \&c.})}{(x^2 f + hx + \text{L.})^m}$$

$$= \frac{1}{f^m} \cdot \frac{(ax^{2m-1}dx + bx^{2m-2}dx + \text{ \&c.})}{(x^2 + 2gx + p)^m}$$

(en divisant le numérateur par f^m & le dénominateur par f, qui est censée élevée à la puissance m, & faisant $\frac{h}{f} = 2g$, $\frac{\text{L}}{f} = p$) peut être intégrée ; car en supposant $x + g = z$, l'on a $x = z - g$, & $x^2 + 2gx + p = zz + p - g^2 = zz + ga$, en faisant $p - g^2 = ga$. Maintenant si dans le numérateur l'on substitue la valeur de x, l'on aura une fraction de cette forme

$$\frac{a' z^{2m-1}dz + b' z^{2m-2} + c' z^{2m-3}dz \text{ \&c.}}{(zz + ga)^m},$$

qui est de la forme de celle dont on vient de parler & qu'on peut intégrer de même, que ga soit une quantité positive ou négative.

6o. Soit maintenant la fraction pure $\frac{p\,dx}{q}$, p étant une fonction de x dont l'exposant soit moindre que celui de x dans q autre fonction rationnelle de x. Pour intégrer cette fraction, il faut trouver les facteurs de q, ce qui se fait en égalant q à o, & cherchant ensuite les racines de l'équation $q = o$.

Si, par exemple, $q = x^3 - ax^2$, je fais $x^3 - ax^2 = o$; donc $x^2 = o$, & $x - a = o$; ainsi les facteurs de q sont x, x & $x - a$, ou x^2 & $x - a$. On réduira ensuite la fraction proposée en d'autres fractions pures dont chacune ait pour dénominateur un des facteurs du

dénominateur de la proposée, & il sera ensuite facile d'intégrer.

Soit $\frac{p\,dx}{q} = \frac{M\,dx}{(x+a).N}$, M & N étant des fonctions rationnelles de x. Pour avoir la fraction correspondante au facteur $x+a$, je suppose cette fraction $= \frac{A\,dx}{x+a}$. A l'égard de la fraction qui, jointe à celle-ci, peut rendre la proposée, je la suppose égale à $\frac{R\,dx}{N}$; donc $\frac{M\,dx}{(x+a)N} = \frac{A\,dx}{x+a} + \frac{R\,dx}{N}$. Il est évident que R sera une fonction entière de x; car autrement, ayant réduit les fractions au même dénominateur, le numérateur ne seroit pas une fonction entière de x, ce qui est contre la supposition. Je réduis au même dénominateur, & j'ai $\frac{M\,dx}{(x+a).N} = \frac{AN\,dx + (x+a).R.dx}{(x+a).N}$. En comparant les numérateurs, l'on a $M = AN + (x+a).R.$, ou $R = \frac{M - AN}{x+a}$; donc puisque R doit être une fonction rationnelle & entière, M—AN doit être exactement divisible par $x+a$; Ainsi en faisant $x+a = 0$, ou $x = -a$, l'on aura $M - AN = 0$, ou $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & AN la quantité $-a$ au lieu de x.

61. Soit la fraction pure $\frac{a\,x\,dx}{(x-2a).(xx-aa)}$, on demande de trouver la fraction qui convient au facteur $x-2a$. représentant la fraction cherchée par $\frac{A\,dx}{x-2a}$, celle qui convient à l'autre facteur $xx-aa$, étant $= \frac{R\,dx}{xx-aa}$, l'on aura $\frac{a\,x\,dx}{(x-2a).(xx-aa)} = \frac{A\,dx}{x-2a} + \frac{R\,dx}{xx-aa}$. L'on aura aussi $ax = M$, $xx - aa = N$, & $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le fac-

teur $x-2a$ égalé à 0. Mais $x-2a=0$, donne $x=2a$; donc $A=\frac{2aa}{3aa}=\frac{2}{3}$; donc la fraction cherchée eſt $=\frac{2}{3}\cdot\frac{dx}{x-2a}$.

Pour avoir la fraction $\frac{A\,dx}{x+a}$, qui convient au facteur $x+a$, l'autre fraction étant $\frac{R\,dx}{xx-3ax+2aa}$. * l'on remarquera que $M=ax$, & $N=xx-3ax+2aa$. Donc $A=\frac{M}{N}$ devient $=\frac{-aa}{6aa}=-\frac{1}{6}$, en ſubſtituant $-a$ au lieu de x; donc la fraction qui convient au facteur $x+a$ eſt $=\frac{-dx}{6(x+a)}$. Si l'on veut avoir la fraction qui convient au facteur $x-a$, on pourra encore ſuppoſer cette fraction $=\frac{A\,dx}{x-a}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit rendre la propoſée étant $=\frac{R\,dx}{xx-ax-2aa}$; donc $M=ax$, & $N=xx-ax-2aa$. Faites $x=a$, & vous aurez $A=\frac{M}{N}=\frac{aa}{-2aa}=\frac{-1}{2}$; donc la fraction cherchée eſt $=\frac{-dx}{2.(x-a)}$. En effet, l'on réduit au même dénominateur les trois fractions qu'on vient de trouver & qu'on en faſſe la ſomme, l'on aura la fraction propoſée. Maintenant je prends les intégrales de ces fractions & leur ſomme $\frac{2}{3}$ L.$(x-2a)-\frac{1}{6}$ L.$(x+a)-\frac{1}{2}$. L. $(x-a)$, donne l'intégrale de la fraction propoſée.

62. Telle eſt la méthode qu'on peut ſuivre pour trouver une fraction ſimple qui convienne à un facteur ſimple qui n'en a pas d'autre qui lui ſoit égal. Voyons maintenant comment on peut s'y prendre lorſqu'il y a des facteurs égaux.

* Le dénominateur eſt le produit des facteurs $x-2a$, & $x-a$.

Soit la fraction pure $\frac{M\,dx}{N.(x+a)^2}$, dans laquelle N ne contient pas le facteur $x+a$. Supposons que la fraction qui convient au facteur $(x+a)^2$ soit $= \frac{Ax\,dx+B\,dx}{(x+a)^2}$, l'autre fraction qui, avec celle-ci, doit être égale à la proposée, étant $= \frac{R\,dx}{N}$; donc $\frac{M}{(x+a)^2.N} = \frac{Ax+B}{(x+a)^2} + \frac{R}{N}$. Multipliant cette équation par N & transposant, il vient $\frac{M-N.(Ax+B)}{(x+a)^2} = R$. Mais R doit être une fonction entière; donc $M-N.(Ax+B)$ sera divisible deux fois exactement par $x+a$. Et en supposant $x=-a$, cette quantité sera $=0$, ce qui servira à déterminer B; car alors $M-N.(Ax+B)=0$, ou $\frac{M}{N} - Ax = B$, en supposant $x=-a$. Si après avoir substitué la valeur de B, on divise la même quantité par $x+a$, parce que le quotient de cette division est encore divisible par $x+a$, en supposant encore $x=-a$, il deviendra $=0$; d'où l'on tirera une nouvelle équation qui, avec celle qu'on a déjà trouvée, suffira pour déterminer A & B.

Soit la fraction pure $\frac{(ax-2xx).dx}{(x+a)^2.(xx-2aa)}$. On demande la fraction qui répond au facteur quarré $(x+a)^2$, l'on a $M=ax-2xx$, $N=xx-2aa$. La quantité $M-N.(Ax+B)$ qui doit faire trouver les valeurs de A & de B, sera donc $=ax-2xx+(2aa-xx).(Ax+B)$. Mettez dans cette quantité $-a$ au lieu de x, pour avoir $-3aa+aa.(B-aA)=0$; Donc $B=3+A.a$. Substituons cette valeur de B dans la même quantité, elle deviendra $ax-2xx+(2aa-xx).(Ax+3+Aa)$, qui doit être divisible par $x+a$. Disposez-la ainsi, $ax-5xx+6aa+(2aa-xx).A.(x+a)$, ou $(6a-5x).(x+a)+(2aa-xx).A.(x+a)$. Divisez cette quantité par $x+a$, pour avoir $6a-5x+(2ax-xx).A.$

Suppoſant de nouveau $x = -a$, cette dernière quantité devient $11.a + aa.A = 0$; donc $A = -\frac{11}{a}$, $B = 3 + A.a = 3 - 11 = -8$; & la fraction cherchée eſt $= \frac{-11xdx - 8adx}{a.(x+a)^2}$. Cette fraction eſt $= \frac{-11xdx}{a.(x+a)^2} - \frac{8dx}{(x+a)^2}$, dont (56) l'intégrale dépend de $\int \frac{x^n dx}{(x+x)^m}$, qu'on peut avoir par la méthode ci-deſſus. Pour trouver les fractions qui répondent aux facteurs $x + \sqrt{2aa}$, $x - \sqrt{2aa}$, qui réſultent du facteur $xx - 2aa$ égalé à 0, on fera $\sqrt{2aa} = b$, & l'on cherchera par la méthode ci-deſſus (61), les fractions correſpondantes aux facteurs ſimples $x + b$, $x - b$.

S'il y avoit un facteur triple $(x+a)^3$, la fraction correſpondante auroit cette forme $\frac{(Ax^2 + Bx + C).dx}{(x+a)^3}$.

Soit la fraction $\frac{M\,dx}{(x+a)^3.N}$, N ne contenant pas $x+a$, l'on aura $\frac{M}{(x+a)^3.N} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x+a)^3} + \frac{R}{N}$. En raiſonnant comme ci-deſſus, l'on verra que $R = M - N.(A.x^2 + Bx + C)$, & que cette dernière quantité eſt diviſible par $(x+a)^3$. Suppoſant dans cette quantité égalée à 0, $x = -a$, l'on aura la valeur de C, exprimée en A & en B, ſubſtituant cette valeur de C dans la valeur de R; vous diviſerez cette valeur par $x + a$, & égalant enſuite le réſultat à 0, vous aurez une équation qui déterminera B. Subſtituant de même cette valeur de B, diviſant par $x + a$, & égalant le quotient à 0, après avoir fait $x = -a$, vous aurez la valeur de A, & en rétrogradant vous connoîtrez B & C. C'eſt la même méthode s'il y a 4, 5, ou un plus grand nombre de facteurs égaux. Si le nombre des facteurs égaux eſt m, la fraction correſpondante au facteur $(x+a)^m$ ſera de cette forme

$$\frac{(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + F)\,dx}{(x+a)^m}$$

Soit la fraction $\frac{a^6 dx}{(x-a)^5 . x}$. Je cherche d'abord la fraction ſimple qui convient au facteur x qui n'en a pas d'autre qui lui ſoit égal. Soit cette fraction $\frac{A dx}{x}$, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus (61) l'on a $A = \frac{M}{N}$, en mettant dans M & N la valeur de x que donne le facteur x égalé à o ; donc puiſque $M = a^6$, & $N = (-a)^5$, l'on aura $A = \frac{a^6}{(-a)^5} = -a$, & la fraction cherchée ſera $= \frac{-a dx}{x}$. Pour avoir la fraction correſpondante au facteur quintuple $(x-a)^5$, je remarque que $M = a^6$, $N = x$, & $R = M - N . (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$ quantité évidemment $= -Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 - Ex + a^6$ (I). Ayant fait $x = a$, vous trouverez (en égalant à o), $E = -A.a^4 - Ba^3 - Ca^2 - Da + a^5$. Subſtituez cette valeur dans la formule (I) pour avoir $-Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 - Dx^2 + (Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da - a^5) . x + a^6$. Diviſant cette dernière quantité par $x - a$, l'on aura cette ſeconde formule

II. $$\begin{array}{llll} -Ax^4 & -A.a.x^3 & -Aaa.x^2 & -Aa^3x - a^5 \\ & -Bx^3 & -Ba.x^2 & -Ba^2x \\ & & -Cx^2 & -Cax \\ & & & -Dx \end{array}$$

Faites $x = a$, pour avoir $-4Aa^4 - 3Ba^3 - 2Ca^2 - Da - a^5 = o$; donc $D = -4Aa^3 - 3Ba^2 - 2Ca - a^4$. Mettant cette valeur dans la ſeconde formule, il vient

$$\begin{array}{llll} -Ax^4 & -Aax^3 & -Aa^2x^2 & +3a^3x - a^5. \\ & -Bx^3 & -Ba.x^2 & +2Ba^2x \\ & & -Cx^2 & +Ca.x \\ & & & +a^4x \end{array}$$

Diviſez cette quantité par $x - a$ pour avoir la troiſième formule III. $-Ax^3 - 2Aa.x^2 - 3Aa^2x + a^4$
$- Bx^2 \quad -2Ba.x$
$-Cx$

Faites dans cette formule $x = a$, & vous aurez l'équation $-6Aa^3 - 3Ba^2 - Ca + a^4 = 0$; donc l'on a $C = -6Aa^2 - 3Ba + a^3$. Subſtituez cette valeur de C dans la troiſième formule pour avoir

$-Ax^3 - 2A.ax^2 + 3Aa^2x + a^4$; Diviſez
$-Bx^2 \quad +Ba.x$
$-a^3x$

cette équation par $x - a$, pour avoir la quatrième formule IV. $-Ax^2 - 3A.a.x - a^3$. Faites $x = a$,
$-Bx$

& vous aurez l'équation $-4Aa^2 - Ba - a^3 = 0$; donc $B = -4Aa - a^2$. Subſtituant cette valeur de B dans la quatrième formule, il vient $-Ax^2 + Aax$
$+a^2x$
$-a^3$; diviſant cette quantité par $x - a$, l'on a la cinquième formule V. $-Ax + a^2$. Suppoſant $x = a$, il vient $-Aa + a^2 = 0$, ou $A = a$. Donc en rétrogradant l'on a $B = -5a^2$, $C = 10a^3$, $D = -10a^4$, $E = 5a^5$; ainſi la formule cherchée ſera

$$\frac{(ax^4 - 5a^2.x^3 + 10a^3.x^2 - 10a^4.x + 5a^5).dx}{(x-a)^5}$$

En effet ſi l'on ajoute cette fraction avec la fraction $-\frac{a\,dx}{x}$ & qu'on réduiſe au même dénominateur, l'on trouvera (toute réduction faite) la fraction propoſée.

Soit la fraction $\frac{(x^2 - b^2)\,dx}{x.(xx + bb)}$, la fraction qui vient du facteur x ſe trouve par la méthode ci-deſſus

dessus (61.) $= \frac{-dx}{x}$. Je cherche les facteurs simples que donne le facteur double $xx + bb$, en égalant ce facteur à 0; ce qui donne $x^2 = -bb$, ou $x = \pm b\sqrt{-1} = \pm m$, en supposant la quantité imaginaire $b\sqrt{-1} = m$. Il s'agit donc de trouver les fractions qui conviennent aux facteurs $x - m$ & $x + m$. La fraction qui répond au premier facteur est (par le N°. 61) $= \frac{dx}{x-m}$, & la fraction qui répond au second facteur $x + m$ est $= \frac{dx}{x+m}$. Si l'on réduit ces deux fractions imaginaires au même dénominateur, & qu'on en prenne la somme, l'on aura (en remettant $b\sqrt{-1}$ au lieu de m) $\frac{2xdx}{x^2+b^2}$, quantité réelle. Intégrant cette fraction, & la fraction $\frac{-dx}{x}$, l'on aura l'intégrale de la fraction proposée $=$ L. $(x^2 + b^2)$ − L. $x =$ L. $\left(\frac{x^2+b^2}{x}\right)$.

Si l'on avoit intégré les fractions $\frac{dx}{x-m}$, $\frac{dx}{x+m}$ avant de les réduire au même dénominateur, l'on auroit eu L. $(x-m)$ + L. $(x+m) =$ L. $(x^2 - m^2) =$ L. $(x^2 + b^2)$, ce qui fait voir que la somme des deux logarithmes imaginaires peut être une quantité réelle. En général si une fraction rationnelle a des facteurs imaginaires la somme des intégrales des deux fractions qui appartiennent à deux facteurs $x - m$, $x + m$, m étant une quantité imaginaire, sera toujours une quantité réelle.

63. Soit la formule $\frac{b^6 dx}{x^2.(x^2+b^2)^2}$. La fraction qui répond au facteur double x^2 est $= \frac{b^2 dx}{x^2}$, ce que l'on

trouvera par la méthode ci-deſſus (62)*. Le facteur $(x^2+bb)^2$ donne $(x-m)^2.(x+m)^2$, en faiſant $m=b\sqrt{-1}$. La fraction correſpondante au facteur $(x-m)^2$, ſera (par la méthode qu'on vient d'expliquer) $=\frac{\left(\frac{3}{4}m.x-mm\right)dx}{(x-m)^2}$, la fraction correſpondante au facteur $(x+m)^2$ étant $=\frac{\left(-\frac{3}{4}m.x-mm\right)dx}{(x+m)^2}$. La ſomme de ces fractions donne la fraction réelle $\frac{(-b^2x^2-2b^4)\,dx}{(x^2+b^2)^2}$, en ſubſtituant la valeur de m. Pour intégrer cette fraction, je la décompoſe en ces deux-ci $\frac{-b^2x^2\,dx}{(x^2+b^2)^2}$, $\frac{-2b^4dx}{(x^2+b^2)^2}$. L'intégration de chacune dépend de l'intégration de la fraction $\frac{x^n\,dx}{(x^2+ga)^m}$, qu'on peut intégrer par la méthode ci-deſſus (58).

A l'égard de l'intégrale de la fraction $\frac{b^2dx}{x^2}$, elle eſt égale à $S.b^2x^{-2}\,dx=-b^2x^{-1}=-\frac{b^2}{x}$.

On peut voir par-là que la ſomme des fractions que peuvent donner à la fois un même nombre de facteurs $(x-m)^n$ & $(x+m)^n$, ſera toujours une fraction réelle quand même m ſeroit imaginaire.

Si l'on avoit une fraction de cette forme $\frac{(ax^{2m+2n+2}+bx^{2m+2n+1})\,dx}{x.(x^2-a^2)^n(x^2+2ax+b^2)^m}$ on pourroit tou-

* Les Commençans peuvent ſuppoſer $x^2=(x+0)^2$, afin de fixer leur imagination.

jours l'intégrer. Car il eſt aiſé de voir qu'on trouvera facilement la fraction correſpondante au facteur x. Le facteur $(x^2-a^2)^n$, donne $(x-a)^n(x+a)^n$. Le facteur $(x^2+2ax+b^2)^m$ égale à o, donné $x^2+2ax=-b^2$, $x^2+2ax+aa=a^2-b^2$, ou $x+a=\pm p$, [en faiſant $\sqrt{(a^2-b^2)}=p$], ou $x+a\mp p=o$; donç le facteur propoſé donnera $(z-p)^m(z+p)^m$, en faiſant $x+a=z$, ce qui donne $dx=dz$; Mais on trouvera facilement les fractions correſpondantes aux facteurs $(z-p)^m$, $(z+p)^m$., & la ſomme de ces fractions ſera réelle, quand même p ſeroit imaginaire. Il ſuffira donc de chercher d'abord les fractions des facteurs ſimples réels ou imaginaires, qu'on peut repréſenter par x^m, ou $(x+g)^m$, ou $(x-g)^m$, & pour avoir les fractions que peut donner un facteur double de la forme $x^2+2ax+b^2$ dont les racines ſont ſuppoſées imaginaires, l'on ſera $\sqrt{(aa-bb)}=p$, & $x+a=z$, on ſubſtituera dz au lieu de dx, & $z-a$ au lieu de x, ſoit dans la prepoſée, ſoit dans les fractions correſpondantes aux facteurs $(z-p)^m$, $(z+p)^m$. Si les facteurs de $(x^2+2ax+b^2)^m$ étoient réels, on pourroit les repréſenter par $(x-g)^m$, $(x+f)^m$, & il ſeroit inutile de faire $x+a=z$. Il n'eſt pas même néceſſaire de le faire dans aucun cas, puiſqu'en faiſant $a-p=g$, $a+p=f$, on peut repréſenter les facteurs $(x+a-p)^m$ $(x+a+p)^m$ par $(x+g)^m$, $(x+f)^m$.

64. REMARQUE. Quelque ſoit le dénominateur d'une fraction rationnelle, on peut, en l'égalant à o, chercher ſes facteurs réels, & s'il a des facteurs imaginaires, ils ſeront en nombre pair, & en multipliant deux à deux ceux qui contiennent la même quantité imaginaire, mais avec des ſignes différens, & la même quantité réelle avec les mêmes ſignes, l'on aura des facteurs réels du ſecond degré; or les fractions qui réſulteront de ces facteurs donneront des quantités réelles.

COROLLAIRE. On peut conclure de la doctrine qu'on vient d'expoſer, que toute fraction ra-

tionnelle est toujours intégrable, ou algébriquement, ou par les logarithmes, ou par les arcs de cercle. Véritablement nous n'avons pas de méthode générale pour trouver les facteurs réels, simples ou doubles du dénominateur d'une fraction rationnelle quelconque; mais c'est un défaut de l'algèbre plutôt que de la méthode d'intégration qu'on vient de développer.

Il ne sera pas inutile de remarquer que si quelque facteur du dénominateur étoit multiplié par une constante a, par exemple, & que l'on eût $ax + gb$ pour un tel facteur, on pourroit diviser ce facteur par a, pour avoir $x + \frac{gb}{a} = x + c$, en faisant $\frac{gb}{a} = c$; Mais on diviseroit aussi le numérateur par a. En général, il n'est pas difficile de voir comment il faut s'y prendre pour que chacun des facteurs du dénominateur contienne au premier terme la variable x sans aucune constante.

DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE DÉPEND DE LA RECTIFICATION DE L'ELLIPSE OU DE L'HYPERBOLE, SÉPARÉMENT OU ENSEMBLE.

65. Selon ce qu'on a dit dans la section précédente (38), si l'on fait l'abscisse d'une hyperbole à compter du centre $= z$, l'ordonnée $= u$, le demi-premier axe $= a$, le demi-second axe $= b$, $\frac{bb}{aa} = g$, $zz = \frac{ax + aa}{g + 1}$, $\frac{aa - bb}{a} = p$, la différentielle de l'arc hyperbolique sera $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(x^2 \pm px - bb)}}$; Le signe + a lieu si $aa - bb$ est une quantité positive, & le signe — si cette quantité est négative. Mais si l'hyperbole est équilatere, la différentielle de l'arc sera $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(xx - bb)}}$.

En faisant la puissance de l'hyperbole $= aa$, l'abscisse asymptotique $= z$, $a^2 = g$, $z = x^{\frac{1}{2}}$, l'élément de l'arc hyper-

bolique sera $= \frac{1}{2} . x^{-\frac{3}{2}} . dx \sqrt{(xx+g^2)}$. Dans l'ellipse en supposant $\frac{bb}{aa} = g$, l'abscisse du centre $= z$, $zz = \frac{ax-aa}{g-1}$, $\frac{aa+bb}{a} = p$, l'élément de l'arc elliptique sera $= \frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{(px-xx-bb)}}$.

66. COROLLAIRE I. L'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}} \times dx\sqrt{(xx+bb)}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatere entre les assymptotes perpendiculaires, dont l'équation est $zu = 1.b = b$, z étant l'abscisse assymptotique comptée du centre, u l'ordonnée, & en faisant $zz = x$. Car soit s cet arc hyperbolique, on aura $ds = \sqrt{(dz^2+du^2)} = z^{-2} dz \sqrt{(z^4+bb)} = \frac{2}{2} . x^{-\frac{3}{2}} dx \, (xx+bb)^{\frac{2}{2}}$; $x^{-\frac{3}{2}} dx \, (xx+bb)^{\frac{2}{2}} = 2\,ds$, & S. $x^{-\frac{3}{2}} dx \, (xx+bb)^{\frac{2}{2}} = 2s$ plus ou moins une constante C. Il suit de-là que l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}} dx \, (e+fx)^{\frac{2}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e & f sont positifs : car $e+fxx = f.(\frac{e}{f}+xx)$; donc $x^{-\frac{3}{2}} dx \, (e+fxx)^{\frac{2}{2}} = f^{\frac{2}{2}} . x^{-\frac{3}{2}} dx \, (\frac{e}{f}+x^2)^{\frac{2}{2}} = f^{\frac{2}{2}} x^{-\frac{3}{2}} . dx \, (xx+bb)^{\frac{2}{2}}$, en faisant $\frac{e}{f} = bb$.

67. COROLLAIRE II. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx \, (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole équilatere dont l'axe $= 2b$, l'équation étant $uu = zz - bb$, z étant l'abscisse comptée du centre, u l'ordonnée au premier axe, & faisant $bx = 2zz - bb$, ou $z = \sqrt{(\frac{bx+bb}{2})}$. Car en supposant que cet arc est $= s$,

l'on aura $ds = \frac{dx\sqrt{bx}}{2\sqrt{(xx-bb)}} = \frac{1}{2}.b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx.(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$*; $\frac{2ds}{\sqrt{b}} = x^{\frac{1}{2}}dx.(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{b}} = S.x^{\frac{1}{2}}dx \times (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il suit delà que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fxx)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole lorsque e est négatif & f positive; car $(e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{f}+xx\right)^{-\frac{1}{2}}$; donc en faisant $\frac{e}{f} = -bb$, l'on aura $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fxx)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc, &c.

68. COROLLAIRE III. L'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $= 2b$, le premier $= 2a$, & dont l'équation est $uu = \frac{bb}{aa}(\zeta\zeta - aa)$, en prenant u pour l'ordonnée, & ζ pour l'abscisse comptée du centre, & en faisant $\frac{bb}{aa} = g$, $\zeta = \sqrt{\left(\frac{ax+aa}{g+1}\right)}$, $\pm p = \frac{aa-bb}{a}$. Car soit s cet arc, l'on aura $ds = \sqrt{(d\zeta^2+du^2)} = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S.x^{\frac{1}{2}}dx(xx \pm p - bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il est aisé de voir que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque h étant positif, e est négatif, quel que soit f: car $e+fx+hx^2 = h\left(\frac{e}{h}+\frac{fx}{h}+x^2\right)$; donc la différen-

* Cela suit du N°. 65, en changeant a en b.

tielle dont on vient de parler est $h^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{h}+\frac{fx}{h}+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= h^{-\frac{1}{2}}(xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$ en faisant $-bb = \frac{e}{h}$, & $\pm p = \frac{f}{h}$.

69. COROLLAIRE IV. L'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'ellipse dont un des axes est $2a$, l'autre $2b$, & l'équation $uu = \frac{bb}{aa}(aa - zz)$, en prenant u pour l'ordonnée, z pour l'abscisse comptée du centre sur l'axe $2a$, & en faisant $g = \frac{bb}{aa}$, $z = \sqrt{\left(\frac{ax-aa}{g-1}\right)}$, & $p = \frac{aa+bb}{a}$; car soit s l'arc de cette ellipse, l'on aura $ds = \sqrt{(dz^2+du^2)} = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, & $\frac{12s}{\sqrt{a}} = S.x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$.

Il est aisé de voir que l'intégrale de la différentielle trimone $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc elliptique, lorsque f étant positive, e & h sont négatifs *; car si on fait $f = +c$ quantité positive, $e = -q$, & $h = -r$, cette différentielle deviendra $= x^{\frac{1}{2}}dx(cx-rxx-q)^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(\frac{c}{r}x-xx-\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, en supposant $p = \frac{c}{r}$ & $bb = \frac{q}{r}$.

* Si e, f & h étoient à la fois négatifs & x positif, la différentielle seroit imaginaire.

REMARQUE. Dans l'hyperbole on a $\pm p = \frac{aa - bb}{a}$ ou $aa \mp pa = bb$; donc en regardant a comme une inconnue, on trouvera par la méthode de la réſolution des équations du ſecond dégré, on trouvera, dis-je, $a = \pm \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}pp + bb)}$. On ne donne pas le ſigne — au radical, afin d'éviter un axe négatif. Mais dans l'ellipſe l'on a $p = \frac{aa + bb}{a}$, & $a = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - bb)}$.

70. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^{\frac{1}{2}} dx (bb - xx)^{-\frac{3}{2}}$. En ſuppoſant $x = \frac{bb}{z}$, on aura $x^{\frac{1}{2}} = bz^{-\frac{1}{2}}$, $dx = -bbz^{-2}dz$, $xx = b^4 z^{-2}$; donc la différentielle propoſée eſt $= \frac{-b^2 dz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz - bb)}} =$ $\frac{-z^2 dz - bb\,dz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz - bb)}} + \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{(zz - bb)}}$, comme il eſt aiſé de le voir en réduiſant la derniere fraction au dénominateur $z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz - bb)}$. Or S. $\frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{(zz - bb)}}$ eſt $= \frac{2s}{\sqrt{b}}$, s étant un arc d'hyperbole équilatère dont l'équation eſt $uu = yy - bb$, y étant l'abſciſſe comptée du centre ſur le premier axe $2b$, & en faiſant $y = \sqrt{(\frac{bz + bb}{2})}$. Tout cela ſuit du corollaire II (67); Il ſuffit, pour le comprendre, de changer x en z dans l'équation $\frac{2s}{\sqrt{b}} = S. x^{\frac{1}{2}} dx \times (xx - bb)^{-\frac{3}{2}}$. L'autre différentielle $\frac{-z^2 dz - bb\,dz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz - bb)}}$ eſt $=$

$\frac{-zzdz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}.z^{\frac{1}{2}}.\sqrt{(z-\frac{bb}{z})}} = \frac{-dz-bbz^{-2}dz}{\sqrt{(z-bbz^{-1})}} = \frac{-dt}{t^{\frac{1}{2}}}$, en faisant $z-bbz^{-1}=t$, ce qui donne $dz+bbz^{-2}dz=dt$, & $\sqrt{(z-bbz^{-1})}=t^{\frac{1}{2}}$; donc S. $\frac{-zzdz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{(zz-bb)}} = -2t^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{(z-bbz^{-1})} = -2\sqrt{(\frac{bb}{x}-x)} = -2\sqrt{(\frac{bb-xx}{x})}$; donc l'intégrale de la fraction proposée est $\frac{2s}{\sqrt{b}} - 2\sqrt{(\frac{bb-xx}{x})}$, plus ou moins une constante; ainsi l'intégrale de la fraction proposée dépend d'une quantité algébrique & d'un arc hyperbolique.

71. En faisant $x = \frac{bb}{z}$, on trouvera aisément que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(bb \pm px - xx)^{-\frac{1}{2}}$ est S. $\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(zz \pm pz - bb)}} - \frac{2.\sqrt{(zz \pm pz - bb)}}{\sqrt{z}}$. Or on sait par le corollaire troisième (68), que l'intégrale de la différentielle $z^{\frac{1}{2}}dz(zz \pm pz - bb)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole dont le second axe $= 2b$, le premier $= 2a$, l'équation étant $uu = \frac{bb}{aa}(yy - aa)$, en prenant y pour l'abscisse comptée depuis le centre sur le premier axe, u pour l'ordonnée, faisant $g = \frac{bb}{aa}$, & $y = \sqrt{(\frac{az+aa}{g+1})}$. Il suit de-là que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+hx^2)^{-\frac{1}{2}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e étant positif h est négatif, quelque soit f positive ou négative. Car supposant $h = -c$, on aura $e+fx+$

$k x^2 = c\left(\frac{e}{c} + \frac{f}{c} - xx\right) = c(bb \pm px - xx)$ en faisant $\frac{e}{c} = bb$, $\frac{f}{c} = \pm p$; donc $x^{\frac{1}{2}} dx(e+fx+hx)^{-\frac{n}{2}} = c^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx(bb \pm px - xx)^{-\frac{n}{2}}$; donc &c.

72. PROBLEME. *Trouver l'intégrale de la différentielle* $x^{-\frac{1}{2}} dx(bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Il eſt évident que $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} = \frac{b\,dx + x\,dx - x\,dx}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} = \frac{dx(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{b\sqrt{(bb-xx)}}$. Or (70) l'intégrale de $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ & par conſéquent celle de $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{b.\sqrt{(bb-xx)}}$ dépend de la rectification d'un arc d'hyperbole & d'une quantité algébrique, mais l'intégrale de la différentielle $\frac{dx.(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}}$ ſe trouvera de la manière ſuivante : parce que $bb - xx = (b+x).(b-x)$, on aura $\frac{dx(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}} = \frac{dx\sqrt{(b+x)}}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)}}$; & en ſuppoſant $b+x=z$, l'on a $dx = dz$, $\sqrt{(b+x)} = z^{\frac{1}{2}}$, $x = z-b$, $b-x = 2b-z$, $\frac{dx\sqrt{(b+x)}}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b.\sqrt{(3bbz - zz - 2b^3)}} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b.\sqrt{(pz - zz - cc)}}$, en faiſant $3bb = p$, & $2bb = cc$; mais par le corollaire IV (69), l'intégrale de cette dernière différentielle dépend d'un arc d'ellipſe ; ainſi on aura S. $\frac{dx.(b+x)}{b.x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}}$ par la rectification d'un arc elliptique. Donc on aura l'intégrale de la différentielle propoſée par une quantité

algébrique & par la rectification de l'hyperbole & de l'ellipſe enſemble.

73. COROLLAIRE I. La différentielle $x^{-\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, en faiſant $x=\frac{bb}{z}$ devient $=\frac{-bbz^{-2}dz}{b.z^{-\frac{1}{2}}bz^{-1}\sqrt{(bb-zz)}}=\frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-zz)}}$, qui a la même forme que celle du problême; donc ſon intégrale dépend d'une quantite algébrique & de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipſe.

74. COROLLAIRE II. En faiſant $bb=\frac{e}{c}$, & $f=-c$, l'on aura $\sqrt{(e+fxx)}=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb-xx)}$. Faiſant $e=-c$, on aura $\sqrt{(e+fxx)}=f^{\frac{1}{2}}.\left(xx-\frac{c}{f}\right)=f^{\frac{1}{2}}\sqrt{(xx-bb)}$, en faiſant $bb=\frac{c}{f}$; donc l'intégrale de la formule $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(e+fxx)^{\frac{1}{2}}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipſe, lorſque des deux quantités e & f l'une eſt poſitive, & l'autre négative.

75. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole & de l'ellipſe, & d'une quantité algébrique. Car en ſuppoſant $\sqrt{(xx+bb)}=y-x$, on aura $xx+bb=yy-2yx+xx$, $x=\frac{yy-bb}{2y}$, $\sqrt{(xx+bb)}=y-x=\frac{yy+bb}{2y}$, $dx=\frac{dy(yy+bb)}{2yy}$, $x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)}=\frac{yy+bb}{2y}\times\frac{\sqrt{(yy-bb)}}{\sqrt{2y}}$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(bb+xx)}}=\frac{dy\sqrt{2}}{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{(yy-bb)}}$.

différentielle qui, au multiplicateur $\sqrt{2}$ près, a la forme de celle du corollaire premier (73); donc &c.

76. REMARQUE. L'on peut trouver l'intégrale de toutes les différentielles qui dépendent de la rectification des arcs elliptiques & hyperboliques, soit séparément ou ensemble, on peut, dis-je, trouver ces intégrales par des séries, ou par la quadrature de quelque courbe algébrique, en suivant les méthodes que nous avons enseignées ci-devant. Nous pourrions aisément ramener un plus grand nombre de différentielles aux rectifications des arcs elliptiques & hyperboliques, soit séparément ou ensemble; mais nous avons d'autres objets à considérer.

M. Maclaurin, dans son Traité des fluxions, distingue différentes classes ou ordres de différentielles. La première classe comprend celles dont les intégrales peuvent être déterminées exactement en termes finis par des expressions algébriques, ou géométriquement par des figures rectilignes. La seconde classe comprend les différentielles dont les intégrales peuvent se trouver par les tables des sinus & des logarithmes, ou par la quadrature de l'hyperbole, de l'ellipse ou du cercle. La troisième classe renferme celles dont les intégrales supposent la rectification des arcs elliptiques ou hyperboliques. On peut à ces trois classes en ajouter une infinité d'autres: par exemple, on pourroit faire une classe de toutes les différentielles qui supposeroient la rectification d'une courbe algébrique du troisième ordre qui ne seroit pas exactement rectificable comme la cissoide.

L'illustre M. d'Alembert auquel les mathématiques doivent tant, a fait beaucoup de recherches sur les différentielles de la troisième classe, & il a ramené un très-grand nombre de formules à la rectification de l'hyperbole & de l'ellipse, comme on peut le voir dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746 & 1748.

DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DE TOUS LES ORDRES, ET DE CELLES QUI SONT AFFECTÉES DE SIGNES D'INTÉGRATION, EN SUPPOSANT QU'IL N'Y AIT QU'UNE VARIABLE DANS CHAQUE DIFFÉRENTIELLE, OU S'IL Y A DEUX DIFFÉRENTIELLES DANS LA MÊME FORMULE, QUE L'UNE DES DEUX SOIT CONSTANTE.

77. PROBLEME. *Intégrer l'équation différentielle* $d^m y = p\,dx^m$ *dans laquelle* dx *eſt conſtant*, p *une fonction de* x, *&* m *l'expoſant de l'ordre de la différentielle.* Puiſque dx eſt conſtant, on peut le déſigner par une conſtante g, & exprimer ainſi l'équation $d^m y = g^{m-1} p\,dx$, & en prenant les intégrales de part & d'autre, on aura $d^{m-1} y = g^{m-1} S.p\,dx + C g^{m-1}$, C étant une conſtante arbitraire qu'on pourra déterminer par les conditions données ; donc en remettant dx au lieu de g, on aura $d^m y = dx^{m-1} S.p\,dx + C\,dx^{m-1}$ *; mais parce que p eſt une fonction de x, on pourra trouver l'intégrale S. $p\,dx$ par quelqu'une des méthodes précédentes. Suppoſant donc S. $p\,dx = r$, fonction de x, on aura l'équation $d^{m-1} y = r\,dx^{m-1} + C\,dx^{m-1} = g^{m-2} r\,dx + C g^{m-2}\,dx$; & en intégrant, il viendra $d^{m-2} y = g^{m-2} S.r\,dx + C g^{m-2} x + D g^{m-2} = dx^{m-2} S.r\,dx + C x.dx^{m-2} + D\,dx^{m-2}$, D étant encore une conſtante arbitraire

* En différenciant cette équation on retrouvera la propoſée ; car dx étant conſtant, la différentielle de $C\,dx^{m-1}$ ſera $= 0$.

ou déterminable par des conditions données. On continuera de même à intégrer jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne aucune différentielle ; & il est aisé de voir qu'il faudra faire autant d'intégrations qu'il y a d'unités dans l'exposant m, ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I. Soit d^2y, ou $ddy = ax^m dx^2$; en intégrant de part & d'autre, on trouve $dy = \frac{ax^{m+1}dx}{m+1} + C\,dx$; & par une seconde intégration, l'on a $y = \frac{ax^{m+2}}{(m+1).(m+2)} + Cx + D$.

EXEMPLE. II. Soit $d^3y = ax^m dx^3 + bx^n dx^3$. La premiere intégration donnera $ddy = \frac{ax^{m+1}dx^2}{m+1} + \frac{bx^{n+1}dx^2}{n+1} + C\,dx^2$; par une seconde intégration, l'on aura $dy = \frac{ax^{m+2}dx}{(m+1).(m+2)} + \frac{bx^{n+2}dx}{(n+1).(n+2)} + Cx.dx + D\,dx$; & par une troisième intégration, il vient $y = \frac{ax^{m+3}}{(m+1).(m+2).(m+3)} + \frac{bx^{n+3}}{(n+1).(n+2).(n+3)} + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E$, E étant une constante arbitraire, qu'on détermine par des conditions données.

78. On peut réduire une différentielle d'un ordre quelconque de la forme $d^m y = a\,dx\,d^{m-1}y + p\,dx^m$ à une équation différentielle du premier ordre, dx étant constant & p une fonction de x ; car en intégrant de part & d'autre, on aura $d^{m-1}y = a\,dx\,d^{m-2}y + dx^{m-1}$ S. $p\,dx +$

$C dx^{m-1}$, C étant une constante *. En intégrant une seconde fois, on trouve $d^{m-2}y = a dx d^{m-3}y +$ dx^{m-2}. S. $(dx.$ S. $p\,dx)$ ** $+ C x dx^{m-2} +$ $D. dx^{m-2}$. En intégrant une troisième fois, il vient $d^{m-3}y = a dx d^{m-4}y + dx^{m-3} \times$ S. $\Big(dx.$ S. $(dx.$ S. $p\,dx)\Big) + \frac{C x^2 dx^{m-3}}{2} +$ $D x dx^{m-3} + E dx^{m-3}$; & en continuant on parviendra enfin à une équation du premier ordre.

Soit, par exemple, l'équation $dddy = a dx ddy +$ $p dx^3$, on aura par la première intégration, $ddy =$ $a dx. dy + dx^2$ S. $p\,dx + C dx^2$; & par la seconde intégration, $dy = a y dx + dx \times$ S. $(dx.$ S. $p\,dx) + C x dx + D dx = a y dx +$ $t dx + C x dx + D dx$, en faisant S. $p\,dx = r$, & S. $r\,dx = t$.

79. THÉORÊME. *p étant tout ce qu'on voudra, si dx est constant, on aura l'intégrale* S. $p\,dx =$ $p x -$ S. $x\,dp = p x - \frac{x^2 dp}{2dx} +$ S. $\frac{x^2 ddp}{2dx} = px - \frac{x^2 dp}{2dx} + \frac{x^3 ddp}{2.3.dx^2} -$ S. $\frac{x^3 d^3 p}{2.3.dx^3} = px - \frac{x^2 dp}{2dx} + \frac{x^3 ddp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4 d^3 p}{2.3.4.dx^3} +$ S. $\frac{x^4 d^4 p}{2.3.4.dx^3} = px$ &c. On démontre ce théo-

* Cette constante peut être = o.

** Nous parlerons bien-tôt de la manière dont on peut avoir les intégrales des quantités qui renferment des signes d'intégration.

rême en prenant les différentielles des deux membres de chaque équation, car on les trouve égales. Ainsi dans la premiere équation S. $pdx = px -$ S. $x\,dp$, on trouve en différenciant, $p\,dx =$ $p\,dx + x\,dp - x\,dp = p\,dx$. Dans la seconde équation, $px -$ S. $xdp = px - \frac{x^2\,dp}{2\,dx} +$ S. $\frac{x^2\,d\,dp}{2\,dx}$, ou $-$ S. $x\,dp = -\frac{x^2\,dp}{2\,dx} +$ S. $\frac{x^2\,d\,dp}{2\,dx}$; en différenciant de part & d'autre, & supposant dx constant, on a $-x\,dp = -\frac{2x\,dx\,dp}{2\,dx} - \frac{x^2\,d\,dp}{2\,dx} + \frac{x^2\,d\,dp}{2\,dx} = -x\,dp$; & ainsi des autres. Donc S. $pdx = px - \frac{x^2\,dp}{2\,dx} + \frac{x^3\,d\,dp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4\,d^3p}{2.3.4.dx^3} + \frac{x^5\,d^4p}{2.3.4.5.dx^4}$ — &c. ce qui donne la série trouvée par M. Jean Bernouilli, dans les actes de Léipsick, année 1694.

Lorsque p est une fonction de x, on délivre cette série de toute différentielle. Car soit $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = t\,dx$, &c. on aura S. $p\,dx = px - \frac{x^2q}{2} + \frac{x^3r}{2.3} - \frac{x^4t}{2.3.4} +$ &c. $= px -$ S. $q\,x\,dx = px - \frac{x^2q}{2} +$ S. $\frac{x^2r\,dx}{2} = px - \frac{x^2q}{2} + \frac{x^3r}{2.3} -$ S. $\frac{x^3t.dx}{2.3}$ $= px$ &c. *.

* Selon M. *Fontaine* (voyez ses Mémoires), pour avoir S. $y\,dx$, y étant une fonction de x, on doit

Avant

Avant de passer au théorême suivant nous remarquerons que l'on a toujours $d.uz = u\,dz +$

multiplier $\frac{1}{2^{n-1}}x$ par une suite dont on trouvera le premier terme en mettant $\frac{1}{2^n}x$ au lieu de x dans la fonction y; le second terme se trouvera en substituant $\frac{3x}{2^n}$ au lieu de x dans la même fonction y; le troisième en substituant $\frac{5x}{2^n}$ au lieu de x; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui se trouvera en substituant $\frac{2^n-1}{2^n}$ au lieu de x, & cela d'autant plus exactement que n sera un plus grand nombre. Ce qu'on vient de dire de $S.y\,dx$ doit s'entendre également de $S.p\,dx$ lorsque p est une fonction de x. On voit aisément que les valeurs substituées de x forment une progression arithmétique $\frac{1x}{2^n}.\frac{3x}{2^n}.\frac{5x}{2^n}.\frac{7x}{2^n}$. &c. ($n$ est l'exposant de 2). Par exemple, si l'on suppose $p = \sqrt{(2x - x^2)}$, $p\,dx$ sera l'élément de l'aire d'un demi-cercle dont le diamètre $= 2$, & le rayon $= 1$, & selon cette règle l'aire $S.p\,dx$ sera $= \frac{x}{2^n}.\left(\sqrt{2.\frac{x}{2^n} - \frac{x^2}{2^{2n}}} + \sqrt{2.\frac{3x}{2^n} - \left(\frac{3x}{2^n}\right)^2} + \&c.\right)$, d'autant plus exactement que le nombre positif n sera plus grand. Si $n = 5$, & $x = 1$, le quart du cercle dont le rayon $= 1$, sera $= \frac{1}{2^9}.(\sqrt{63.1} + \sqrt{61.3} + \sqrt{59.5} \ldots\ldots + \sqrt{33.31})$. Pour avoir le premier terme de la suite, on fera attention qu'en supposant $x = 1$, la fraction $\frac{x}{2^n}$ devient $= \frac{1}{2^n}$; mais la quantité sous le signe du premier radical est alors =

$z\,du$; donc $uz = S.\,ud\,z + S.\,z\,du$. Ainſi nous aurons le lemme ſuivant.

LEMME. $S.\,ud\,z = uz - S.\,z\,du$.

$\frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^{2n+1} - \frac{1}{2^{2n}} = \frac{63}{2^{2n}} = 63.1$, en faiſant paſſer $\frac{1}{2^{2n}}$ hors du ſigne. Il n'eſt pas difficile de voir comment on a trouvé les autres termes ; le point indique la multiplication. Si l'on vouloit l'aire entière du cercle, on multiplieroit tout par 4, quarré de 2, & pour cela il ſuffiroit, en laiſſant tout le reſte, d'écrire $\frac{1}{2^7}$ au lieu de $\frac{1}{2^9}$.

Par la même règle on aura $S.\,\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2^{n-1}}\,x \times \left(\frac{1}{1+\frac{x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{3x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{5x}{2^n}} + \frac{1}{1+\frac{7x}{2^n}} + \text{&c.}\right) = 2x\left(\frac{1}{2^n+x} + \frac{1}{2^n+3x} + \frac{1}{2^n+5x} + \text{&c.}\right)$. Pour déterminer la conſtante C qu'on doit ajoûter à ces ſortes de ſéries, je remarque que la première ſérie qu'on a trouvée pour le cercle devient $= o$, lorſque $x = o$; donc $C = o$. Il en eſt de même pour la ſérie $2x\left(\frac{1}{2^n+x} + \text{&c.}\right)$. Donc ſi alors la ſérie doit être o, la conſtante ſera $= o$. Mais ſi par la nature de la queſtion, on trouvoit une ſérie $= A$, lorſque $x = o$ doit donner une ſérie $= o$, l'on auroit, $A + C = o$, ou $C = -A$. Par cette méthode l'on peut trouver par aproximation l'intégrale d'une différentielle quelconque à une ſeule variable.

80. THÉORÈME. *p étant une variable quelconque, on a les équations ſuivantes :*

I. $S.dx\,S.p\,dx = x\,S.p\,dx - S.p\,x\,dx.$

II. $S.dx\,S.dx\,S.p\,dx = \frac{x^2 S.pdx - 2x S.pdx + S.px^2dx}{2}.$

III. $S.dx\,S.dx\,S.dx\,S.p\,dx = \frac{x^3 S.pdx - 3x^2 S.pxdx + 3x.\,S.px^2\,dx - S.px^3dx}{2.3}.$

IV. $S.dx\,S.dx\,S.dx\,S.dx\,S.p\,dx = \frac{x^4 S.pdx - 4x^3 S.pxdx + 6x^2 S.px^2dx - 4x S.px^3dx + S.px^4dx}{2.3.4},$

& généralement, ſi le nombre des S. dx qui précédent S. p d x, eſt m, & que 1.2.3.4..... m déſigne le produit de tous les nombres de la ſuite 1, 2, 3, 4, 5 &c. juſqu'au terme m de cette ſuite incluſivement, on aura l'équation ſuivante,

$$S.dx\,.\,S.dx\,.....\,S.p\,dx = [\,x^m\,S.p\,dx - \frac{m}{1}x^{m-1}S.px\,dx + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}S.px^2dx - \frac{m.(m-1).(m-2)x^{m-3}}{1.2.3}.S.px^3dx.... \pm S.px^m\,dx\,] : (1.2.3.4.5.6.7.....m)^*$$

* Les deux points indiquent une diviſion.

le ſigne ſupérieur a lieu lorſque m eſt un nombre pair, & le ſigne — ſi m eſt impair. En prenant les différentielles des deux membres des quatre premières équations, on les trouvera égales; d'où l'on pourra conclure que la derniere équation doit avoir lieu; mais on peut démontrer le théorême de cette autre manière. On trouve la première équation $S.dx.S.pdx = x.S.pdx - S.pxdx$ par le lemme précédent, en ſuppoſant $S.pdx = u$ & $x = z$, ce qui donne $pdx = du$, $pxdx = zdu$, $dx = dz$, $d.S.pdx = udz$, $uz = xS.pdx$; donc par le lemme, $S.udz = S.dx.S.pdx = uz - S.zdu = xS.pdx - S.pxdx$. On trouve la ſeconde équation par la première & par le même lemme : car puiſque $S.dx.S.pdx = x.S.pdx - S.pxdx$, en multipliant de part & d'autre par dx, il vient $dx.S.dx.S.pdx = xdx\,S.pdx - dx\,S.pxdx$; & en prenant les intégrales, on a $S.dx.S.dx.S.pdx = S.xdx.S.pdx - S.dx.S.pxdx$. Or en ſuppoſant $S.pdx = u$, & $xdx = dz$ dans l'intégrale $S.xdx.S.pdx$, on a $pdx = du$, $\frac{1}{2}x^2 = z$, $uz = \frac{1}{2}x^2 S.pdx$, $zdu = \frac{1}{2}px^2dx$, $udz = xdxS.pdx$, & $S.udz = S.xdx.S.pdx = uz - S.zdu = \frac{x^2 S.pdx - S.px^2dx}{2}$. En Suppoſant $S.pxdx = u$, & $x = z$ dans l'intégrale $S.dx.S.pxdx$, on a $pxdx = du$, $dx = dz$, $uz = xS.pxdx$, $zdu = px^2dx$, $udz =$

$x\,dx$ S. $p\,x\,dx$, & par le lemme, S. $u\,dz =$
S. dx. S. $pxdx = uz -$ S. $z\,du = x$ S. $p\,x\,dx -$
S. $p\,x^2\,dx = \frac{2\,x\,\text{S.}\,p\,x\,dx \;-\; 2\,\text{S.}\,p\,x^2\,dx}{2}$;
donc S. $x\,dx$. S. $p\,dx$ — S. dx. S. $p\,x\,dx =$
$\frac{x^2\,\text{S.}\,p\,dx - \text{S.}\,p\,x^2\,dx - 2\,x\,\text{S.}\,p\,x\,dx + 2\,\text{S.}\,p\,x^2\,dx}{2} =$
$\frac{x^2\,\text{S.}\,p\,dx - 2\,x\,\text{S.}\,p\,x\,dx + \text{S.}\,p\,x^2\,dx}{2}$;

On trouve de même la troisième équation par la seconde & par le lemme ; la quatrième par la troisième & par le lemme, &c. ; Et en observant la loi de ces équations, on parvient à l'équation générale.

81. REMARQUE. Supposons que l'on a une suite de courbes MA, MB, MC, &c. (fig. 10) qui ayent une abscisse commune MP & terminées dans la même ordonnée indéfinie PF, & telles que l'aire PAM = A de la première, divisée par une ligne que je fais = 1, soit égale à l'ordonnée de la seconde, l'aire de la seconde divisée par 1 soit égale à l'ordonnée de la troisième, & ainsi de suite. Supposons encore que p fonction de x est l'ordonnée de la première courbe ; de manière cependant que $p\,dx$, différentielle de l'aire A ne soit pas intégrable. Nous appellerons la quadrature S. $p\,dx$ = A, quadrature transcendante du premier degré, la quadrature B de la seconde courbe, transcendante du second degré, & ainsi de suite selon l'ordre des courbes ; or l'on peut réduire ces quadratures transcendantes à la rectification des courbes algébriques. Car A =

S. $p\,dx$; & parce que $\frac{A}{1}$ eſt l'ordonnée de la ſeconde courbe, $A\,dx = dx$ S. $p\,dx$ ſera la différentielle de l'aire B ; donc B = S.dx.S.pdx. L'on aura de même l'aire C de la troiſième courbe = S. [dxS.(dx S.pdx)]; &c. Mais S.dx S.pdx = xS.pdx — S.$pxdx$ & en général la quadrature tranſcendante d'une courbe du degré $m + 1$ ſe réduit à cette forme $\frac{\text{S.}\,dx\ \text{S.}\,dx\ \text{S.}\,dx \ldots \text{S.}\,p\,dx}{1.2.3.4.\ldots.m} = x^m \text{S.}\,p\,dx - \frac{m}{1}x^{m-1}\text{S.}\,pxdx \ldots\ldots \pm p\,x^m dx$.

Il ne reſte donc qu'à réduire par les méthodes ci-deſſus (n°. 19 & ſuivans) les quadratures S. pdx, S. $pxdx$, S. px^2dx, &c. à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a de termes affectés de S, & en ſubſtituant dans la ſérie précédente, on aura la quadrature tranſcendante du degré $m + 1$ réduite à la rectification d'autant de courbes algébriques qu'il y a d'unités dans $m + 1$.

82. REMARQUE II. Soit $p = y$ l'ordonnée de la première courbe, l'ordonnée de la ſeconde ſera $= \frac{\text{S.}\,y\,dx}{1} = \text{S.}\,y\,dx$, &c. donc la quadrature tranſcendante de la courbe de l'ordre $m + 1$ ſera $= \frac{x^m \text{S.}\,ydx - \frac{m}{1}x^{m-1}\text{S.}\,yxdx + \frac{m.(m-1).x^{m-2}}{1.2}\text{S.}\,yx^2dx \ldots \pm \text{S.}\,yx^m dx}{1.2.3.4.5.\ldots.m}$

Il n'eſt pas difficile de voir que le théorême pré-

cédent peut être utile pour l'intégration des différentielles à deux variables *.

* Il eſt évident qu'en ſuppoſant $p = y$, il y aura pluſieurs variables; c'eſt-à-dire deux variables dans la différentielle de l'aire de la quadrature tranſcendante de la courbe de l'ordre $m+1$; donc cette aire, qu'on peut avoir au moins par approximation, ſera $= \overline{S.dx.\ S.dx \ldots S.y\,dx}$ & la différentielle de l'aire ſera $= dx.\ \overline{S.dx \ldots S.y\,dx}$.

Pour avoir la ſurface des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne peut pas avoir autrement, ſuppoſons qu'on ait une formule différentielle $y\,dx$, & qu'on ait beſoin de connoître l'intégrale $S.y\,dx$, ſans avoir y exprimé en x. Pour cela on conſidérera les valeurs de y comme les ordonnées d'une courbe dont eſt x l'abſciſſe & y l'ordonnée, & l'on calculera arithmétiquement un grand nombre de valeurs de y, & la ſurface de cette courbe correſpondante aux y ainſi calculés ſera à peu près l'intégrale cherchée. Si les trois ordonnées P M (a), T m (b), N n (c) (Fig. 11) répondent aux abſciſſes A P, A T, A N, & que l'on ait P T = T N = 1, la ſurface P M n N ſera (en conſidérant l'arc M n comme une ligne droite) $= \frac{a+b}{2} + \frac{c+b}{2}$, & s'il y avoit un plus grand nombre d'ordonnées f, g &c. on auroit pour les eſpaces ſuivantes $\frac{c+f}{2} + \frac{f+g}{2}$ &c.

Mais ſi l'arc M m n qui joint trois ordonnées conſécutives eſt un arc de courbe parabolique déterminé par ces trois ordonnées, voici la maniere de trouver la ſurface de l'eſpace P M n N.

Dans une courbe du genre parabolique dont l'équation eſt $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. Si l'on a trois ordonnées a, b, c correſpondantes aux abſciſſes

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES.

83. THÉOREME. *Si p eſt une fonction quelconque des variables x, y, z, u, &c. on aura la dif-*

0, 1, 2, la ſurface P M *n* N ſera $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$, comme on le verra bien-tôt. Subſtituons pour A, B, C des fonctions de *a*, *b*, *c*, telles qu'en mettant zéro au lieu de *x* (l'origine des *x* eſt ici ſuppoſé en P) l'on ait $y = a$, que mettant 1 au lieu de *x*, l'on ait $y = b$, & qu'en mettant 2 au lieu de *x*, l'on ait $y = c$. Ces conditions ſeront remplies en faiſant $y = a + (b - a).x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right).x.(x - 1)$. Alors l'élément $y\,dx$ de P M *n* N ſera $= a\,dx + (b - a).x\,dx + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right).(xx\,dx - x\,dx)$; donc l'eſpace P M *n* N ou $\int y\,dx$ ſera $= ax + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$. Si dans cette expreſſion on fait $x = 2$, l'on aura la ſurface cherchée $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$. Si l'on avoit une ſuite d'ordonnées *a*, *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, &c. Le ſegment compris entre les ordonnées *c*, *e*, *f* (on ſuppoſe leur diſtance $= 1$) ſeroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}e + \frac{1}{3}f$; & en général l'aire de la courbe ſeroit égale à un tiers de la première & de la dernière ordonnée, plus $\frac{4}{3}$ de la ſeconde & de la quatrième, &c; C'eſt-à-dire des termes de rang pair, $+\frac{2}{3}$ de la troiſième, de la cinquième, &c, c'eſt-à-dire, des termes de rang impair.

Les lettres *a*, *b*, *c*, &c., quand il s'agit de l'aire de la courbe déſignent, après l'opération, des ſurfaces & non des lignes; De ſorte que ſi l'ordonnée $a = 1$ pied

férentielle d p ; premièrement en faiſant varier x & conſidérant les variables y, z, u, &c. comme conſtantes ; ſecondement en différentiant comme ſi y étoit variable, tout le reſte étant conſtant, & ainſi de ſuite : la ſomme de toutes ces différentielles ſera la différentielle cherchée. Par exemple, pour différencier la fonction $x\,y\,z$, je conſidere x ſeul comme variable, ce qui me donne $y\,z\,dx$, je différencie enſuite en regardant y ſeul comme variable & j'ai $x\,z\,dy$, & enfin je traite à ſon tour z comme variable pour avoir $xy\,dz$; & la

---

l'ordonnée $b = 2$ pieds & l'ordonnée $c = 3$ pieds, la ſurface déſignée par $\frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$ vaudra 4 pieds quarrés.

Suppoſons que x repréſente un arc de cercle & qu'on veuille avoir S. $(a - \text{cof. } x)^m\,dx$ lorſque $x = 90°$ degrés, on pourra ſuppoſer $dx = 2$ degrés ſi l'on veut, & chercher les ordonnées $(a - \text{cof. } x)^m$ d'une courbe dont x ſeroit l'abſciſſe, en ſuppoſant ſucceſſivement $x = 0$, $x = 2°$, $x = 4°$. &c. juſqu'à $x = 90°$ inclufivement, ce qui donnera 46 ordonnées. On en trouvera tout autant pour le ſecond quart de cercle. On ajoutera enſemble le tiers de la première & de la dernière, &c. comme on vient de l'expliquer & l'on aura la valeur du moins approchée de S. $(a - \text{cof. } x)^m\,dx$. Suppoſons $m = 2$, $a = 3$ & le rayon $= 1$, on cherchera, par le moyen des tables, les valeurs de cof. x, dans la ſuppoſition de $x = 0$, de $x = 2°$, &c. Retranchant ſucceſſivement ces valeurs de $a = 3$, & prenant le quarré du reſte, on aura toutes les ordonnées néceſſaires pour avoir par approximation la valeur de l'intégrale dont on vient de parler. Si on avoit calculé les ordonnées de degré en degré, on auroit fait le premier $x = 1°$; Mais $(a - \text{cof. } x)^m\,dx$ auroit toujours été l'élément de l'aire de la courbe dont la ſurface doit donner l'intégrale de la formule propoſée.

différentielle entiere eſt $= y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz$. Ce qu'on trouveroit de même en différentiant à l'ordinaire ; ce théorême ne paroit pas avoir beſoin de démonſtration.

84. COROLLAIRE. Si p ne contient que deux variables x & y, qu'on ait, par exemple, $p = axy$, la différentielle dp pourra être repréſentée par $A\,dx + B\,dy$. Dans la ſuppoſition dont on vient de parler A eſt $= ay$, & B eſt $= ax$, A étant une quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la ſuppoſition de x ſeul variable, & B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la ſuppoſition de y ſeul variable. Si p contient trois variables x, y, z, l'on pourra repréſenter dp par $A\,dx + B\,dy + D\,dz$, A étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la ſuppoſition de x variable, B la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la ſuppoſition de y variable, D étant la quantité finie qu'on trouve en différentiant p dans la ſuppoſition de z variable ; & ainſi de ſuite. Si on ſuppoſe $p = xyz$, l'on aura $A = y\,z$, $B = x\,z$, $D = xy$.

85. Lorſque la différentielle dp a un intégrale, on peut la trouver en intégrant dans ſon expreſſion $A\,dx + B\,dy + D\,dz +$ &c. 1°. Le terme $A\,dx$, en regardant x ſeul comme variable, 2°. Le terme $B\,dy$ en regardant y ſeul comme variable, & ainſi de ſuite, juſqu'au dernier terme *, & en comparant toutes ces intégrales ; car ſi elles ſont toutes les mêmes, on aura dans la premiere S. $A\,dx$ l'intégrale cherchée. Si elles ſont

* Cela doit s'entendre toujours en ajoutant une conſtante.

différentes, on ajoutera à ce qu'elles ont de commun, tous les termes qui font leurs différences pour avoir l'intégrale p, à laquelle on ajoutera une conſtante C. Voici la raiſon de ce procédé : puiſqu'on a trouvé le premier terme $A\,dx$ en différentiant dans la ſuppoſition que x ſeul étoit variable, en intégrant $A\,dx$ dans la même ſuppoſition, on aura une intégrale S. $A\,dx$ qui rendra p dans la même ſuppoſition. Mais parce que p peut contenir des termes dans leſquels x ne ſe trouve pas & que tous ces termes s'évanouiſſent lorſqu'on différencie dans la ſuppoſition de x ſeul variable, on ne retrouvera pas ces termes dans l'intégrale S. $A\,dx$, mais on les trouvera dans les autres intégrales S. $B\,dy$, S. $D\,dz$, &c. dont les différentielles ont été trouvées en ſuppoſant que y, z, &c. étoient variables ſucceſſivement : car Bdy étant la différentielle de p dans la ſuppoſition de y variable, les termes de p dans leſquels ſe trouve y n'ont pas été détruits par la différenciation de p qui a donné $B\,dy$; on les trouvera donc dans l'intégrale S. Bdy, & ainſi des autres.

Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy = 3y^2x^2\,dx + 2ayx\,dx + b\,dx + 2yx^3\,dy + ax^2\,dy + 2cy\,dy$. L'on aura $A = 3y^2x^2 + 2ayx + b$, $B = 2yx^3 + ax^2 + 2cy$. En intégrant $A\,dx$ dans la ſuppoſition de x ſeul variable, on a S. $A\,dx = y^2x^3 + ayx^2 + bx$; & en intégrant $B\,dy$ dans la ſuppoſition de x conſtant & de y variable, on trouve S. $B\,dy = y^2x^3 + ax^2y + cy^2$. En comparant ces intégrales on trouve que leurs termes communs ſont

$y^2x^3 + ax^2y$, & que leurs termes différens ſont cy^2 & bx. Ajoutant les termes communs avec les termes différens, l'on aura l'intégrale cherchée $y^2x^3 + ax^2y + bx + cy^2 + C$, en ajoutant une conſtante C.

86. REMARQUE. I. On voit par-là qu'en ſuivant cette méthode on integre à chaque fois comme s'il n'y avoit qu'une variable, & que cette opération ſe réduit à l'intégration d'une formule différentielle qui ne renfermeroit qu'une variable.

REMARQUE II. Si l'on avoit une formule $ax^2\,dx + by^m\,dy + cz^{-1}\,dz$, pourvu que chaque terme ne renfermât qu'une ſeule variable, on en auroit l'intégrale $\frac{ax^3}{3} + \frac{by^{m+1}}{m+1} + c\,L.z$, en prenant celle de chacun de ſes termes. Si on a la formule $z^n y^m\,dx$, on pourra l'intégrer facilement lorſque le facteur différentiel $y^m\,dx$ ſera à $z^p\,dz$ en raiſon donnée de $b : a$, quelque ſoit l'expoſant p. Car on aura $a : b :: z^p\,dz : y^m\,dx = \frac{b z^p\,dz}{a}$; donc la différentielle $z^n y^m\,dx$ ſera $= \frac{b z^{p+n}\,dz}{a}$; dont l'intégrale eſt $= \frac{b z^{p+n+1}}{a(p+n+1)}$, excepté le cas où $p + n = -1$: car alors l'intégrale eſt $= \frac{b}{a} L.z$.

87. THÉOREME. *Si* P *eſt une fonction quelconque compoſée de deux variables* x, y *& de conſtantes, & que par conſéquent* dP *ſoit* $= A\,dx + B\,dy$, *la différentielle de* A $d\,x$ *priſe dans la ſuppoſition de* x

conſtant & de y variable, ſera égale à la différentielle de B *d y priſe on ſuppoſant y conſtant & x variable.* Si dans la fonction P on ſubſtitue $x + dx$ au lieu de x, $y + dy$ au lieu de y, & que par ces ſubſtitutions P devienne P′, on aura $dP = P' - P = A\,dx + B\,dy$. Si dans la fonction P on ſubſtitue ſeulement $x + dx$ au lieu de x, en conſidérant y comme conſtant, & que par cette ſubſtitution P devienne T ; en ſubſtituant enſuite dans T, $y + dy$ au lieu de y, T deviendra P′ : puiſque c'eſt la même choſe de ſubſtituer en même tems dans P les deux quantités $x + dx$ au lieu de x & $y + dy$ au lieu de y, ou de ſubſtituer d'abord dans P la quantité $x + dx$ au lieu de x pour changer P en T & de ſubſtituer enſuite dans T, $y + dy$ au lieu de y. Par la même raiſon ſi on ſubſtitue d'abord dans P la quantité $y + dy$ au lieu de y pour changer P en t ; en ſubſtituant enſuite dans t, la quantité $x + dx$ au lieu de x, l'on changera t en P′.

Donc ſi on différentie P en ſuppoſant x variable & y conſtant, la différentielle ſera $T - P = A\,dx$, & ſi l'on différentie P en ſuppoſant x conſtant & y variable, la différentielle ſera $= t - P = B\,dy$. Mais parce qu'en ſubſtituant $y + dy$ au lieu de y dans P & T, T devient P′ & P devient t, & que par conſéquent T — P devient P′ — t, la différentielle de T — P, ou de $A\,dx$, eſt P′ — t — T + P, en retranchant T — P de P′ — t.

De même puiſqu'en ſubſtituant dans P la quantité $y + dy$ au lieu de y, P devient t, & t — P devient $B\,dy$, & qu'en ſubſtituant dans t & dans P la quantité $x + dx$ au lieu de x, t devient P′ & P devient T, & que par conſéquent t — P devient P′

— T, la différentielle de B dy, ou de t — P, ſera, en ſuppoſant x conſtant & y variable, ſera, disj-e, = P′ — T — t + P = A dx; donc, &c.

88. COROLLAIRE I. Donc la différentielle d (A.dx) priſe en ſuppoſant dx conſtante & y variable eſt égale à la différentielle d (B.dy) priſe en ſuppoſant ſeulement x variable; donc dA.dx = dB.dy, ou $\frac{(d\,A)}{dy} = \frac{(d\,B)}{dx}$; c'eſt-à-dire, qu'une différentielle A dx + B dy ne peut être intégrable & donner une intégrale finie P, ſi en prenant la différentielle de A en faiſant varier y & diviſant cette différentielle par dy, le quotient n'eſt pas égal à la différentielle de B priſe en faiſant varier x & diviſant par dx.

89. COROLLAIRE II. Si P eſt une fonction de trois variables x, y & z, & que par conſéquent l'on ait dP = A dx + B dy + C dz; on aura les trois équations $\frac{(d\,A)}{dy} = \frac{(d\,B)}{dx}$, $\frac{(d\,A)}{dz} = \frac{(d\,C)}{dx}$, $\frac{(d\,B)}{dz} = \frac{(d\,C)}{dy}$, en prenant la différentielle du numérateur de chaque fraction, dans la ſuppoſition que l'on fait varier, la ſeule variable qui ſe trouve au dénominateur. Car puiſque A dx + B dy + C dz eſt la différentielle de P, fonction des variables x, y & z, ſi on ſuppoſe z conſtant, le dernier terme s'évanouira & la différentielle d P ſera = A dx + B dy, & l'on aura (88) $\frac{(d\,A)}{dy} = \frac{(d\,B)}{dx}$. Si on ſuppoſe y conſtant, B dy s'évanouira & l'on aura d P =

$A\,dx + C\,dz$; donc $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$. Si on suppose x constant, l'on trouvera $dP = B\,dy + C\,dz$; donc $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; donc si la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz$, ne donne pas les trois équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, cette différentielle n'aura pas d'intégrale finie P. Si l'on a $A\,dx + B\,dy + C\,z + D\,t$, pour que cette différentielle ait une intégrale finie, il est nécessaire que l'on ait les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dt} = \frac{(dD)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$, $\frac{(dB)}{dt} = \frac{(dD)}{dy}$, $\frac{(dC)}{dt} = \frac{(dD)}{dz}$; & ainsi de suite pour un nombre quelconque de variables. On doit donc avoir autant d'équations qu'il y a de manières réellement différentes de combiner les lettres A, B, C, D, &c. deux a deux *. (On peut consulter le Traité des Combinaisons dans nos Institutions Mathématiques, derniere édition).

* Pour trouver ces combinaisons il n'y a d'abord, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, qu'à comparer le premier coefficient à tous les autres, chercher ensuite les équations que donne le second coefficient comparé à tous ceux qui le suivent; on cherchera de même les équations que donne le troisième comparé avec tous ceux qui le suivent, & ainsi de suite, & l'on aura facilement toutes les équations qu'on cherche. Voyez ce que nous avons dit dans notre algèbre lemme III. N°. 39.

90. LEMME. *Supposant que* A *est une fonction de* y *&* de x *& qu'on ait trouvé l'intégrale* S. A dx *en considérant* x *seul comme variable, si on différencie cette intégrale en faisant varier* y *seulement, la différentielle* d. S. A dx *sera* $= dy$ S. $\frac{(dA)\,dx}{dy}$.

l'expression (dA) signifie qu'on prend la différentielle de A en faisant varier seulement y dont la différentielle se trouve au dénominateur. Soit P une fonction de y & de x, l'on aura $dP = A\,dx + B\,dy$, & $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ (88); donc $dB = \frac{(dA)}{dy}.dx$, & en intégrant dans la supposition de x seul variable, on aura $B = S.\frac{dA}{dy}.dx$, & $B\,dy = dy\,S.\frac{dA}{dy}.dx$; donc la différentielle totale $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.S.\frac{dA}{dy}.dx$; mais S. A dx étant l'intégrale P, l'on aura d (S. A dx) $= B\,dy$, en faisant varier y seul dans S. A dx. Soit $P = ax^2y^3$, l'on aura $dP = 2ay^3x\,dx + 3ax^2y^2\,dy = A\,dx + B\,dy$; donc $A = 2ay^3x$, $B = 3ax^2y^2$, $dA = 6ay^2x\,dy$, en faisant varier seulement y, $\frac{(dA)}{dy} = 6ay^2x$; ainsi l'on aura S. $\frac{(dA)}{dy}.dx = 3ay^2x^2$ (en intégrant dans la supposition de y constant); & dy. S. $\frac{(dA)}{dy}.dx = 3ax^2y^2\,dy = B\,dy$,

On

On appelle *différentielles complettes* celles qui ſont intégrables dans l'état où elles ſont.

91. THÉORÈME. *Si une différentielle ne donne pas les équations dont on a parlé ci-deſſus, elle n'eſt pas complette; mais on peut l'intégrer, ſi elle les donne.* La première partie du théorême ſuit de ce qu'on a dit ci-deſſus, la ſeconde partie ſuit du lemme. Car ſuppoſons la différentielle $dP = A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.\,S.\,\frac{A}{dy}.\,dx$ (Par le lemme précédent); l'intégrale P ſera $= S.\,A\,dx$ en regardant x ſeul comme variable; or on peut évidemment avoir l'intégrale de $A\,dx$ en ſuppoſant que A eſt une fonction de conſtantes, ou qu'elle ne contient d'autres variables que x. Si on trouvoit plus de facilité à prendre l'intégrale de $dy\,\frac{S.A}{dy}.\,dx$, on pourroit la prendre, cela reviendroit au même. Soit $dP = A\,dx + B\,dy = 2axy\,dx + 2ax^2\,dy$, l'on aura $S\,A\,dx = ax^2y$, en regardant y comme conſtant; l'on aura de même $S.\,B\,dy = S.dy\,S.\,\frac{dA}{dy}.\,dx = ax^2y$, en regardant dans $S.\,\frac{dA}{dy}.\,dx$, x ſeul comme variable & regardant dans la ſeconde intégration y ſeul comme variable. Si l'on avoit la différentielle $dP = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, elle ſeroit complette ſi l'on avoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$: car il ſuit du lemme qu'en prenant convenablement les différentielles, l'on auroit $dS.\,dA.\,dx$

$= B\,dy$, $d\,S.\,d\,A\,dx = C\,dz$, $d\,S.\,d\,B\,dy = C\,dz$; donc $S.\,d\,A.\,dx = P$, en regardant dans A, x seul comme variable & ainsi de même pour un plus grand nombre de variables.

92. REMARQUE I. Le lemme précédent suppose que l'intégrale P de la différentielle $A\,dx + B\,dy$ est une fonction de x & de y mêlés ensemble dans tous les termes de P, & que par conséquent il y a plusieurs variables dans tous les termes de $d\,P$ *: car si l'on suppose $P = ax^2y + by^2$, l'on aura $A = 2axy$, & $B = ax^2 + 2by$; or l'on a $S.\,A\,dx = S.\,2axy.\,dx = ax^2y$, & $d.S.\,A\,dx = axx\,dy$, en regardant dans $S.\,A\,dx, y$ comme constant & dans $d.\,S.\,A\,dx, y$ seul comme variable; donc on auroit $ax^2\,dy = B\,dy$ & $ax^2 = ax^2 + 2by$, ce qui est absurde; ainsi quand dans une différentielle il y aura un terme tel que $2byd\,y$ qui ne contiendra qu'une variable, on peut l'intégrer à part comme ne faisant point partie de la différentielle; autrement l'on ne peut avoir $A\,dx + B\,dy = A\,dx + dy.S.\frac{d\,A}{dy}.\,dx$. S'il y a trois termes dans la différentielle $d\,P = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, il faut pour que la démonstration du théorême ait lieu, que chaque terme contienne les trois variables x, y, z. Si outre ces termes il en avoit un qui ne contînt qu'une seule variable, on l'intégreroit comme ne faisant pas partie de la différentielle; & si outre les trois termes dont on vient de parler, il y en avoit deux

* Sous le nom de variables on comprend les différentielles dy, dx.

qui renfermaſſent chacun les mêmes deux variables x & y, par exemple, on les intégreroit à part (comme ne faiſant pas partie de la différentielle), ſi l'on avoit, à l'égard de ces termes, l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ſans quoi ils ne ſeroient point intégrables. Mais de quelle manière que la choſe arrive, ſi on ne veut pas faire toutes ces attentions, on peut ſe contenter de voir ſi la différentielle propoſée ſatisfait aux équations du n°. 88 & 89 : car alors elle ſera complette.

93. PROBLÊME. *Etant donnée une différentielle du premier ordre à tant de variables qu'on voudra, trouver ſi elle eſt complette ou exacte, & l'intégrer lorſque cela arrive.* On cherchera ſi la différentielle fournit toutes les équations qui doivent avoir lieu ſelon les corollaires ci-deſſus (88 & 89) ; ſi elle ne donne pas ces équations, elle n'eſt pas complette, & on l'abandonnera ; ſi elle les donne, on trouvera ſon intégrale, ou exacte, ou dépendante des quadratures par la méthode ſuivante, qui revient à celle du n°. 85. Soit la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c., qu'on ſuppoſe complette ; on prendra l'intégrale S. $A\,dx$ en ſuppoſant x ſeul variable, on prendra de même l'intégrale S. $B\,dy$ en regardant y ſeul comme variable, on rejettera de cette intégrale tous les termes qui ſe trouvent déja dans S. $A\,dx$, & on ajoutera le reſte R à l'intégrale S. $A\,dx$. On prendra S. $C\,dz$ en conſidérant z ſeul comme variable & l'on ajoutera à S. $A\,dx +$ R tous les termes de S. $C\,dz$ qui ne ſe trouvoient pas déja dans cette première quantité, pour avoir S. $A\,dx +$ R $+$ R'. On pren-

dra S. D. du en considérant u seul comme variable, & rejettant tous les termes qui se trouvent dans S. A dx + R + R′, on ajoutera à cette intégrale le reste R″, & l'intégrale exacte, en ne supposant que quatre variables, sera = S. Adx + R + R′ + R″, à laquelle on ajoutera une constante; on continueroit de même s'il y avoit plus de quatre variables. On s'assurera qu'on ne s'est pas trompé en prenant la différentielle de l'intégrale trouvée, qui doit être égale à la différentielle proposée.

II. MÉTHODE. On prend d'abord l'intégrale S. Adx, comme on vient de le dire, on différencie S. A dx en supposant y seul variable, on retranche cette différentielle du terme B dy, & s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste, dans la même supposition de y seul variable, & désignant cette intégrale par R, on l'ajoute à S. A dx pour avoir S. A dx + R. On différencie ensuite S. A dx + R dans la supposition de z seul variable, on ôte la différentielle du terme C dz, & s'il y a un reste, on en prend son intégrale R′, & l'ajoutant à la précédente, l'on a S. A dx + R + R′; on continue de même jusqu'au dernier terme, & l'on ajoute une constante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle dy. L. x + $\frac{y\,dx}{x}$ + $\frac{bb\,dx}{bb+xx}$ = A dx + B dy; en faisant A = $\frac{y}{x}$ + $\frac{bb}{bb+xx}$, & B = L.x, on trouve que l'équation $\frac{(dA)}{dy}$ = $\frac{(dB)}{dx}$ a lieu; Ainsi la diffé-

rentielle est complette. En me servant de la première méthode, j'ai $S.A\,dx = yLx + S.\frac{b\,b\,dx}{b\,b + x\,x} =$ $y\,L.x + m$, m étant un arc de cercle dont le rayon $= b$, & la tangente $= x$. L'intégrale $S.B\,dy$ prise dans la supposition de x constant, est $y\,L.x$, que je rejette par ce qu'elle se trouve dans $S.A\,dx$. Donc l'intégrale cherchée est $y\,L.x + m$, plus une constante. On trouve la même chose par la seconde méthode.

EXEMPLE II. Soit la différentielle $\frac{z\,y\,dx + x\,z\,dy + 3\,a\,y^2\,z^2\,dy - x\,y\,dz}{z\,z} =$ $A\,dx + B\,dy + C\,dz$. En faisant $A = \frac{y}{z}$, $B = \frac{x}{z} + 3\,a\,y^2$ & $C = -\frac{x\,y}{z\,z}$, l'on a les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = \frac{1}{z}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} =$ $-\frac{y}{z\,z}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy} = -\frac{x}{z\,z}$; donc la différentielle est complette. Je me sers de la seconde méthode. J'ai d'abord $S.A\,dx = \frac{x\,y}{z}$: différentiant cette quantité en ne faisant varier que y, il vient $\frac{x\,dy}{z}$ qu'on retranchera de $B\,dy$, ou de $\frac{x\,dy}{z} + 3\,a\,y^2\,dy$; il reste $3\,a\,y^2\,dy$, dont l'intégrale $= a\,y^3$, qu'on ajoute à la première intégrale trouvée $S.A\,dx = \frac{x\,y}{z}$, la somme est

$\frac{xy}{z} + ay$ (D), différentiant cette somme dans la supposition de z seul variable, on a $-xyz^{-2}dz = -\frac{xydz}{zz}$, que je retranche de $C\,dz$, & comme il ne reste rien, je ne puis pas en prendre l'intégrale pour l'ajouter à l'intégrale D; donc $\frac{xy}{z} + ay^2$ est l'intégrale cherchée. On trouveroit la même intégrale par la première méthode.

EXEMPLE III. On propose la différentielle $az\,dx + 3xx\,dx + bz\,dy + 2cy\,dy + ax\,dz + by\,dz + u^2\,dz + 2zu\,du + 3u^2\,du = A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du$. En faisant $az + 3x^2 = A$, $bz + 2cy = B$, $ax + by + u^2 = C$, $2zu + 3u^2 = D$, L'on a les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx} = 0$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx} = a$, $\frac{(dA)}{du} = \frac{(dD)}{dx} = 0$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy} = b$, $\frac{(dB)}{du} = \frac{(dD)}{dy} = 0$, $\frac{(dC)}{du} = \frac{(dD)}{dz} = 2u$; donc la différentielle proposée est exacte. Je me sers encore de la seconde méthode, & j'ai $S.A\,dx = az\,x + x^3$, dont la différentielle, en faisant varier y seul, est $= 0$. Retranchant 0 de $B\,dy$, il reste $B\,dy$, dont l'intégrale en supposant y seul variable, est $= bzy + cy^2$. L'ajoutant à la première intégrale qu'on vient de trouver, il vient $azx + x^3 + bzy + cy^2$. Différentiant cette quantité en ne faisant varier que z, l'on a $axdz + bydz$;

cette quantité étant retranchée de Cdz, il reſtera u^2dz, dont l'intégrale en conſidérant z ſeul comme variable, eſt u^2z, qu'on ajoutera à la ſomme déja trouvée, pour avoir $azx + x^3 + bzy + cyy + uuz$. Différentiant cette ſomme en ſuppoſant u ſeul variable, il vient $2zudu$ qu'on retranchera de Ddu, il reſtera $3u^2du$ dont l'intégrale u^3 étant ajoutée à la ſeconde ſomme, donne l'intégrale cherchée $= azx + x^3 + bzy + cy^2 + u^2z + u^3$, à laquelle il faut ſuppoſer qu'on a ajouté une conſtante. On doit toujours ſuppoſer qu'on ajoute une conſtante à chaque intégrale ainſi que nous l'avons dit ailleurs. On trouveroit la même choſe par la première méthode, & l'on pourra employer l'une ou l'autre ſelon qu'on le trouvera plus facile.

94. Dans la ſuite nous appellerons équation différentielle une formule différentielle égalée à 0; Cependant nous la déſignerons ſouvent par le mot d'équation. Lorſque la quantité qu'on différencie eſt égalée à 0, la différenciation peut en faire diſparoître quelque facteur mêlé de variables qui multiplie, ou qui diviſe tous les termes de l'équation différentielle. Par exemple, ſi on différencie la quantité $ax^2 - bx^2y + c$, l'on aura la différentielle $2axdx - 2byxdx - bx^2dy$. Mais ſi l'on ſuppoſe $ax^2 - bx^2y + c = 0$, l'on aura l'équation différentielle $2axdx - 2byxdx - bxxdy = 0$, laquelle étant diviſée par le facteur commun & variable x, ſe réduit à $2adx - 2bydx - bxdy = 0$. De même en égalant à 0 la fonction différentielle

$\frac{axy\,dx + by^2\,dx - cxy^3\,dy}{xx+yy}$, & diviſant par le facteur $\frac{y}{xx+yy}$, l'on a l'équation différentielle $axdx + bydx - cxy^2\,dy = 0$. La formule $dz - zn\,dx - m\,du$, dans laquelle n & m ſont des quantités conſtantes ou variables, étant égalée à 0, & diviſée par $e^{S.n\,dx}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, donnera $dz.e^{-S.n\,dx} - zndxe^{-S.n\,dx} - e^{-S.n\,dx} \times mdu$, dont l'intégrale eſt $ze^{-S.n\,dx} - S.e^{-S.n\,dx}.mdu = 0$; car en différenciant cette intégrale, multipliant enſuite par $e^{S.n\,dx}$, on a la différentielle propoſée. Nous n'avons pas ajoûté de conſtante dans l'intégrale, le Lecteur doit y ſuppléer. Ainſi l'on a $z = e^{S.n\,dx}.S.e^{-S.n\,dx}.m\,du + C$, C étant une conſtante.

95. Il eſt évident qu'on peut par les méthodes du problême précédent intégrer une équation différentielle quelconque du premier ordre $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c. $= 0$, lorſqu'elle fournit les équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, &c. Mais ſi la différentielle $A\,dx + B\,dy +$ &c., étant conſidérée comme n'étant pas $= 0$, ne donne pas ces équations, on ne doit pas conclure qu'elle n'eſt pas intégrable lorſqu'on la conſidere comme $= 0$: car (94) il pourroit ſe faire qu'elle eût perdu un facteur variable que

nous désigneront par P ; de sorte que si on retrouvoit ce facteur P, en multipliant l'équation différentielle par P, on lui donneroit la forme $PA\,dx + PB\,dy + PC\,dz + P\,C\,du +$ &c. $= 0$, qu'elle avoit avant la division, ce qui la rendroit complette, & elle donneroit les équations $\frac{(d\,PA)}{dy} = \frac{(d\,PB)}{dx}$, $\frac{(d\,PA)}{dz} = \frac{(d\,PC)}{dx}$, &c. *, qui sont nécessaires pour qu'elle soit complette. De même il peut se faire que l'équation différentielle $A\,dx + B\,dy = 0$ ne donne point l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, quoiqu'en la multipliant par un facteur convenable, il soit possible de la rendre intégrable. Soit $A\,dx + B\,dy = a\,x^{m-1}\,y^{n}\,dx + b\,x^{m}\,y^{n-1}\,dy = 0$, il est évident que cette équation différentielle ne donne pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Mais si on multiplie tous ses termes par le facteur $\frac{1}{x^{m}y^{n}}$, elle donnera ensuite cette équation & sera par conséquent intégrable ; car on aura $a\frac{dx}{x} + \frac{b\,dy}{y} = 0$, ou $a\,L.\,x + b\,L.\,y = C$ (C est une constante) $= L.\,x^{a}\,y^{b}$.

* On doit faire attention que l'expression $\frac{d(PA)}{dy}$ signifie qu'on prend la différentielle du numérateur en faisant varier seulement la variable dont la différentielle se trouve au dénominateur, & qu'on divise ensuite la différentielle du numérateur par le dénominateur. Il en est de même pour les autres expressions de cette nature.

96. REMARQUE. Dès qu'on a trouvé un facteur P qui rend intégrable une équation différentielle, on peut en trouver une infinité d'autres PV qui auront la même propriété, en prenant pour V dans ces facteurs une fonction quelconque de l'intégrale S.P(Adx+Bdy). Dans l'exemple précédent, en faisant $V = x^a y^b$, le facteur $\frac{x^a y^b}{x^m y^n}$, aura cette propriété. Si l'on fait $V = x^{ar} y^{bs}$, le facteur $\frac{x^{ar} y^{bs}}{x^m y^n} = x^{ar-m} y^{bs-n}$ aura encore la même propriété; or l'on peut donner à r & s une infinité de valeurs successives; donc &c. de même on peut aussi prendre pour un autre facteur le produit de P par une constante arbitraire.

97. Soit l'équation différentielle $2a\,dx - 2by\,dx - bx\,dy = 0$, ou $A\,dx + B\,dy = 0$, en faisant $2a - 2by = A$ & $B = -bx$; donc l'on a $\frac{(dA)}{dy} = -2b$, & $\frac{(dB)}{dx} = -b$; ainsi la différentielle $A\,dx + B\,dy$ n'est pas exacte.

On ne doit pas conclure cependant qu'en multipliant l'équation différentielle proposée par un multiplicateur P, on ne puisse pas la rendre intégrable.

Ayant fait la multiplication par le facteur P, on aura $PA\,dx + PB\,dy = 0$, & en supposant que cette équation différentielle est complette, il viendra $\frac{(d.PA)}{dy} = \frac{(d.PB)}{dx}$, ou $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} - \frac{P(dB)}{dx} - \frac{B(dP)}{dx}$

$= 0$ *, équation que j'appellerai (R), & qui ſera d'une grande utilité pour déterminer P : car la difficulté eſt réduite à prendre pour P une fonction de x, & de y aſſez générale, avec des coëfficiens & des expoſans indéterminés, pour que cette fonction faſſe évanouir tous les termes homologues de l'équation qu'on vient de trouver, & fourniſſe des équations particulières pour déterminer les coëfficiens & les expoſans indéterminés.

Prenons pour P dans l'équation différentielle propoſée, la fonction $x^m y^n$, m & n étant des expoſans indéterminés, nous aurons $\frac{(dP)}{dy} = nx^m y^{n-1}$, $\frac{(dP)}{dx} = my^n x^{m-1}$, $\frac{P(dA)}{dy} = -2bx^m y^n$, & $\frac{B(dP)}{dx} = -bmy^n x^m$. Donc l'équation R deviendra $-2bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} - 2bnx^m y^n + bx^m y^n + bmy^n x^m = 0$, ou $-bx^m y^n - 2bnx^m y^n + bmx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$. En égalant à 0 les termes homologues, on

* On peut donner à cette équation une autre forme plus ſimple : car en diviſant les deux termes de l'équation propoſée par le multiplicateur de dy, ce qui eſt toujours aiſé, on aura $B = 1$ & $dB = 0$; donc en effaçant le troiſième terme, ſubſtituant 1, au lieu de B, & tranſpoſant, on trouvera P. $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dP)}{dx} - \frac{A(dP)}{dy}$.

on aura les équations $-b-2bn+bm=0$, & $2anx^m y^{n-1}=0$. Donc $2an=0$, ou $n=0$. Ainſi l'équation $-b-2bn+bm=0$, devient $-b+bm=0$, ou $bm=b$, ou $m=1$. C'eſt pourquoi le facteur $P=x^m y^n$ eſt $=xy^0=x$, & l'équation différentielle complette ſera $2axdx-2byxdx-bx^2dy=0$. Et parce que 0 eſt la différentielle d'une conſtante C, (laquelle peut auſſi être $=0$), l'on aura en intégrant, $ax^2-bx^2y=C$. Si l'on n'ajoute pas de conſtante, il faut toujours la ſuppoſer.

Si l'on avoit l'équation différentielle $bydx+cxdy=0$, qui n'eſt pas complette, on trouveroit par un calcul ſemblable, que $P=x^m y^n=\frac{1}{xy}$, & l'équation différentielle complette ſeroit $\frac{bydx+cxdy}{xy}=0$, ou $\frac{bdx}{x}+\frac{cdy}{y}=0$, dont l'intégrale eſt $bL.x+cL.y=L.x^b y^c$.

98. Soit l'équation différentielle à trois variables $Adx+Bdy+Cdz=0$, dans laquelle la fonction différentielle $Adx+Bdy+Cdz$ ne ſoit pas une différentielle complette, & qu'on veuille la rendre intégrable en la multipliant par un facteur P. Suppoſant la choſe faite, la différentielle $PAdx+PBdy+PCdz$, ſera complette ; donc on aura les trois équations $\frac{(d.PA)}{dy}=\frac{(d.PB)}{dx}$, $\frac{(d.PA)}{dz}=\frac{(d.PC)}{dx}$,

$\frac{(d.PB)}{dz} = \frac{(d.PC)}{dy}$, ou les trois suivantes :

I. $\frac{A(dP)}{dy} + \frac{P(dA)}{dy} = \frac{B(dP)}{dx} + \frac{P(dB)}{dx}$

II. $\frac{A(dP)}{dz} + \frac{P(dA)}{dz} = \frac{C(dP)}{dx} + \frac{P(dC)}{dx}$

III. $\frac{B(dP)}{dz} + \frac{P(dB)}{dz} = \frac{C(dP)}{dy} + \frac{P(dC)}{dy}$

La premiere donne $\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{A\,dx} + \frac{P(dB)}{A\,dx} - \frac{P(dA)}{A\,dy}$. Par la troiſième l'on a $\frac{(dP)}{dy} = \frac{B(dP)}{C\,dz} + \frac{P(dB)}{C\,dz} - \frac{P(dC)}{C\,dy}$. En égalant ces deux valeurs de $\frac{(dP)}{dy}$, multipliant enſuite par A & par C, l'on trouvera facilement l'équation $\frac{CB(dP)}{dx} + \frac{CP(dB)}{dx} - \frac{CP(dA)}{dy} = \frac{AB(dP)}{dz} + \frac{AP(dB)}{dz} - \frac{AP(dC)}{dy}$.

La ſeconde équation donne $\frac{(dP)}{dx} = \frac{A(dP)}{C\,dz} + \frac{P(dA)}{C\,dz} - \frac{P(dC)}{C\,dx}$. Subſtituant cette valeur de $\frac{(dP)}{dx}$ dans l'équation précédente, l'on trouve, après avoir retranché de part & d'autre la quantité $\frac{AB(dP)}{dz}$, diviſé le tout par P, & tranſpoſé,

l'équation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0$, qui fait connoître la relation que les quantités A, B, C doivent avoir entr'elles, afin que la proposée soit intégrable; de maniere que si cette équation n'a pas lieu, il n'y a aucun facteur qui puisse rendre la proposée intégrable. On voit par-là qu'il y a une infinité d'équations différentielles à trois variables, qu'il est impossible d'intégrer.

Ainsi étant proposée une équation différentielle à trois variables, on verra si elle est complette, c'est-à-dire, si elle donne les équations dont on a parlé ci-dessus (89), dans ce cas on l'intégrera par l'une des méthodes du problême précédent. Si elle ne les donne pas, on examinera si elle donne l'équation de condition dont on vient de parler. Si cette équation a lieu, on cherchera le facteur P par la méthode des indéterminés; c'est-à-dire en prenant pour P une fonction des variables x, y & z, avec des exposans & des coefficiens indéterminés, comme on le dira bien-tôt. Si l'équation de condition n'a pas lieu, on abandonnera la proposée comme impossible.

REMARQUE. Si $C = 0$; c'est-à-dire, si la proposée ne contient que deux variables x & y, alors $dC = 0$: car on peut considérer 0 comme une constante; & l'équation de condition devient $0 = 0$, équation identique qui (Iere Partie Calcul, N°. 67) fait voir que c'est un théorême & non un problême; c'est-à-dire, qu'une équation différentielle

à deux variables peut toujours devenir intégrable par le moyen d'un facteur.

99. En général étant donnée une équation différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du$ &c. à tant de variables qu'on voudra, on examinera ſi elle eſt exacte, dans ce cas on l'intégrera par le dernier problême. Si elle n'eſt pas exacte, pour ſavoir ſi elle peut le devenir par la multiplication d'un facteur variable P, on ſuppoſera la choſe faite, & que $PA\,dx + PB\,dy + PC\,dz + PD\,du$ &c. eſt une différentielle exacte. Il eſt évident, par ce qu'on vient de dire (98), que toutes les différentielles de trois termes, telles que $PA\,dx + PB\,dy + PC\,dz$, $PA\,dx + PB\,dy + PD\,du$, $PB\,dy + PC\,dz + PD\,du$, &c.* qu'on peut former en prenant trois termes quelconques dans l'équation propoſée, & les multipliant par P, ſeront des différentielles complettes pourvu qu'on regarde comme conſtantes toutes les variables dont les différences ne ſe trouvent pas dans les trois termes ; donc on aura autant d'équations de condition ſemblables à celle dont on vient de parler (98), qu'il y a de manières de prendre les lettres A, B, C, D, &c. trois à trois.

* Le nombre de ces combinaiſons pour un nombre m de lettres eſt égal au coefficient $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$ du quatrieme terme du binome de Newton. Voyez ce que nous avons dit ſur le binome de Newton dans la premiere partie de cet ouvrage, & notre Traité des Combinaiſons dans nos Inſtitutions Mathématiques.

Si la proposée ne donne pas toutes ces équations, il n'y a aucun facteur qui la puisse rendre intégrable, & on doit l'abandonner. Si la proposée donne toutes les équations de condition, on cherchera P par la méthode dont nous parlerons dans la suite.

100. Il est inutile d'examiner si toutes les équations de condition telles que $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$, ont lieu; parce que quelques-unes de ces équations suivent nécessairement des autres. Soit l'équation différentielle à quatre variables $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du = 0$, qui par la combinaison des lettres A, B, C, D donne les quatre équations de condition suivantes.

La première $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} + \frac{C(dA)}{dy} - \frac{A(dC)}{dy} = 0$, qui vient de l'équation $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$.

La seconde $\frac{B(dD)}{dx} - \frac{D(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{du} - \frac{B(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dy} - \frac{A(dD)}{dy} = 0$, qu'on tire de l'équation $A\,dx + B\,dy + D\,du = 0$.

La troisième $\frac{C(dD)}{dx} - \frac{D(dC)}{dx} + \frac{A(dC)}{du} - \frac{C(dA)}{du} + \frac{D(dA)}{dz} - \frac{A(dD)}{dz} = 0$, qui vient de l'équation $A\,dx + C\,dz + D\,du = 0$.

La

La quatrième $\frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{uu} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0$, que donne l'équation $B\,dy + C\,dz + D\,du = 0$.

Si l'on prend à volonté trois de ces équations de condition, la quatrième s'enſuivra néceſſairement. Prenons, par exemple, les trois premières. Si l'on prend dans la première la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, qu'on égale cette valeur à la valeur de la même quantité priſe dans la ſeconde, qu'on multiplie le réſultat par C & par D, qu'on tranſpoſe dans le premier membre le terme $-\frac{CB(dD)}{dx}$, & qu'on mette dans le ſecond membre tous les termes où dx ne ſe trouve pas, il viendra $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{CB(dA)}{du} - \frac{CA(dB)}{du} + \frac{DA(dB)}{dz} - \frac{DB(dA)}{dz}$. En multipliant par B la troiſième équation de condition & tranſpoſant dans le ſecond membre tous les termes non affectés de dx, l'on trouve $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz} - \frac{BD(dA)}{dz}$. Égalant les valeurs de $\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx}$, effaçant les quantités égales qui ſe

trouveront dans les deux membres de l'équation, diviſant par A, tranſpoſant tous les termes dans le premier membre & les arrangeant, il viendra $\frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} + \frac{D(dB)}{dz} - \frac{B(dD)}{dz} = 0$, qui eſt la quatrième équation de condition. Si l'on prenoit trois autres équations de condition, il en réſulteroit également la quatrième. Ainſi pour ſavoir ſi une équation différentielle à quatre variables qu'on ſuppoſe n'être pas intégrable, peut le devenir en la multipliant par un facteur P, il ſuffira d'examiner trois des quatre équations de condition qu'elle donne. On peut prouver de même que de dix équations de condition que donne une équation différentielle à cinq variables il ſuffit d'en vérifier ſix ; car les autres ſuivent toujours de celles-là. De vingt équations de condition que donne une équation différentielle à ſix variables, il ſuffit d'en examiner dix. Et en général le nombre des variables étant m, le nombre des équations de condition néceſſaires eſt $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$.

101. Lorſqu'une équation différentielle à pluſieurs variables donnera les équations de condition néceſſaires, on prendra pour P une fonction générale compoſée de toutes les variables de la différentielle avec des expoſans & des coefficiens indéterminés, qu'on tâchera enſuite de déterminer par le moyen des équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} =$

$\frac{(dPC)}{dx}$, &c. réduites aux équations $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$, $\frac{P(dA)}{dz} + \frac{A(dP)}{dz} = \frac{P(dC)}{dx} + \frac{C(dP)}{dx}$, &c. Mais il n'eſt pas néceſſaire d'employer toutes ces équations dont le nombre ſeroit celui des différentes manières dont les lettres A, B, C, D, &c. peuvent être priſes deux à deux *; il ſuffira d'en employer un nombre moindre d'une unité que celui des variables de l'équation différentielle propoſée. En effet, ſi l'équation différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, eſt poſſible, elle donnera les trois équations $\frac{(dPA)}{dy} = \frac{(dPB)}{dx}$, $\frac{(dPA)}{dz} = \frac{(dPC)}{dx}$, $\frac{(dPB)}{dz} = \frac{(dPC)}{dy}$, & l'équation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \&c. = 0$; or (100), cette équation de condition ſuit des trois premières; donc réciproquement une quelconque des trois premières ſuit des deux autres & de l'équation de condition. Ainſi ſi deux des trois

* Si le nombre des lettres eſt m, ces lettres peuvent être priſes deux à deux un nombre de fois $\frac{m(m-1)}{2}$

Voyez dans la première partie de cet ouvrage, ce qu'on a dit ſur le binome de Newton, & le Traité des Combinaiſons de nos Inſtitutions Mathématiques.

premières équations ont lieu, comme l'équation de condition eſt ſuppoſée avoir lieu, la troiſième aura néceſſairement lieu, & ſi P ſatisfait aux deux premières, P ſatisfera à la troiſième. En général ſi le nombre des variables eſt m & que P ſatisfaſſe à $m-1$ équations $\frac{(d\mathrm{PA})}{dy} = \frac{(d\mathrm{PB})}{dx}$, $\frac{(d\mathrm{PA})}{dz} = \frac{(d\mathrm{PC})}{dx}$, &c., P ſatisfera à toutes les équations $\frac{(d\mathrm{PA})}{dy} = \frac{(d\mathrm{PB})}{dx}$, &c. de maniere qu'il ſuffit pour déterminer P, d'employer un nombre d'équations moindre d'une unité que celui des variables que renferme l'équation différentielle propoſée.

102. Quant à la forme qu'on doit donner au facteur P, on ne connoit pas de méthode générale pour la trouver. Dans les cas particuliers on pourra eſſayer, comme nous avons fait ci-deſſus (97); mais on réuſſira ſouvent par la méthode ſuivante. L'on prendra pour P une fraction $\frac{1}{M}$ dont le dénominateur ſoit une fonction poſitive ſans diviſeur variable, & d'un degré au-deſſus des fonctions A, B, C, &c., & qui ſoit une fonction de toutes les variables qui ſe trouvent dans ces fonctions, avec des coefficiens indéterminés. Cette regle eſt fondée ſur les deux remarques ſuivantes qui dérivent de la nature du calcul différentiel: 1°. on a obſervé que la plupart des fonctions qui n'ont pas un certain facteur commun à tous leurs termes, n'ont pas non plus ce facteur à leurs différentielles, d'où l'on peut conclure que dans le grand nombre de cas où

cette remarque a lieu, la différentielle $PA\,dx + PB\,dy + PC\,dz +$ &c. qui a le facteur commun P à tous ſes termes, l'aura auſſi à ſon intégrale que nous déſignerons par V : car ſi P n'étoit pas un facteur commun à tous les termes de la fonction V, il ne ſeroit pas non plus un facteur commun à tous les termes de la différentielle $dV = PA\,dx + PB\,dy +$ &c.

2°. On a remarqué que ſi une fonction V a un dénominateur variable, la différentielle dV de cette fonction aura un dénominateur qui ſera un multiple de celui de l'intégrale V. Ainſi ſi $V = \frac{ax}{y}$, l'on aura $dV = \frac{aydx - axdy}{yy}$, où l'on voit que le dénominateur yy de dV eſt multiple du dénominateur y de la fonction V. Donc ſi en ſuppoſant ces deux remarques, on met au lieu du facteur P la quantité $\frac{m}{n}$, dans laquelle m & n ſont des fonctions poſitives des variables qui entrent dans une différentielle dV propoſée ; par la premiere remarque m ſera un facteur commun de la fonction V dont la différentielle $= \frac{m}{n} A\,dx + \frac{m}{n} B\,dy + \frac{m}{n} C\,dz +$ &c., & par la ſecond remarque n contiendra le dénominateur de la fonction V. Si l'on diviſe la différentielle $dV = \frac{m}{n} A\,dx +$ &c. par ſon intégrale V, m diſparoîtra du numérateur, & n ſe diviſera par le dénominateur de l'intégrale, de maniere qu'il ne reſtera au dénominateur qu'une fonction M d'un

degré de plus que les fonctions A, B, C, &c. *; car la quantité $\frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz + \&c.}{M}$, qui résulte de cette diviſion eſt $\frac{dV}{V}$, ou la différentielle du logarithme de V; donc elle doit être d'un degré au-deſſous de l'unité **. Mais $\frac{dV}{V} = d.L.V$ eſt la différentielle de L. V; donc le théorême ci deſſus (91) a toujours lieu, & à la place de P l'on peut ſubſtituer $\frac{1}{M}$ dans les équations que donne le théorême, M étant une fonction poſitive la plus générale des variables qui entrent dans dV, & d'un degré d'une unité de plus que A, B, C, D, &c. avec des coefficiens indéterminés; & s'il y a des radicaux dans A, B, C, &c. il faudra qu'ils entrent dans M en ſe combinant avec x, y, z, &c. de toutes les manieres poſſibles. Donc au lieu des équations $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$, &c, en mettant la quantité $\frac{1}{M}$

* Si $V = \frac{x}{y}$, l'on a $\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$. Or ici les fonctions A & B ſont évidemment du premier degré, & $xy = M$ eſt du ſecond degré.

** On ne regarde pas les différentielles dx, dy, &c. comme augmentant le degré de la fonction; ainſi $x\,dx$ eſt une fonction du premier & non du ſecond degré.

à la place de P, $-\frac{dM}{MM}$ à la place de dP, & multipliant le tout par M M, on aura les équations (N) $\frac{M(dA)}{dy} - \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} - \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dB)}{dz} - \frac{B(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dy} - \frac{C(dM)}{dy}$; &c. On déterminera par ces équations les coefficiens de M & par conséquent le facteur M lui-même. On intégrera ensuite la différentielle complette $\frac{dV}{V} = \frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz + \&c.}{M}$ par quelqu'une des méthodes du dernier problême.

103. Soit proposé d'intégrer l'équation $x\,dx + hy\,dx + mx\,dy + ny\,dy + p\,dy = 0$ *, ou $A\,dx + B\,dy = 0$, en faisant $A = x + hy$, & $B = mx + ny + p$. Puisque A & B sont des fonctions du premier degré de x & de y, il faut prendre pour M une fonction générale de x & de y de deux degrés avec des coefficiens indéterminés b, c, &c., laquelle fonction devant être un facteur de l'équation proposée, peut être supposée $= 0$, & l'on peut délivrer son premier terme de coefficient. Supposons $M = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$; on aura par ces

* Si le terme $x\,dx$ avoit un multiplicateur constant, en divisant tout par ce multiplicateur, on lui donneroit la forme de l'équation différentielle proposée qui est la plus générale de son ordre; si un terme tel que $mx\,dy$, par exemple, manquoit, on feroit $m = 0$; &c.

ſuppoſitions $\frac{(dA)}{dy} = h$, $\frac{(dB)}{dx} = m$, $\frac{(dM)}{dy} = bx + 2ey + f$, $\frac{(dM)}{dx} = 2x + by + c$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{M(dA)}{dy} - \frac{A(dM)}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx} = 0$ *, on aura l'équation

$$\left.\begin{array}{llllll} hx^2 & +2nxy & +hcx & +nby^2 & +ncy & +hg \\ +m & -2e & -f & -me & +bp & -mg \\ -b & & +2p & -he & -mf & +pc \end{array}\right\} = 0.$$ Si dans cette équation on fait chaque terme $= 0$, on aura ſix équations du premier degré, $h + m - b = 0$, $2n - 2e = 0$, $hc - f + 2p = 0$, $nb - me - he = 0$, $nc + bp - mf = 0$, $hg - mg + pc = 0$, qui donneront les coefficiens $b = h + m$, $c = \frac{ph - pm}{hm - n}$, $e = n$, $f = \frac{ph^2 + phm - 2pn}{hm - n}$, $g = \frac{-p^2}{hm - n}$, qu'on ſubſtituera dans la valeur de $M = xx + bxy +$ &c., ſubſtituant enſuite celle de M dans $\frac{Adx + Bdy}{M}$, on aura

$$\frac{(x + hy)\,dx + (mx + ny + p)\,dy}{x^2 + (m+h)xy + \left(\frac{ph - pm}{hm - n}\right)x + nyy + \left(\frac{phh + phm - 2pn}{hm - n}\right)y - \frac{p^2}{(hm-n)}}$$

* C'eſt la même que l'équation N (102), en tranſpoſant les termes.

$= \frac{A\,dx}{M} + \frac{B\,dy}{M}$. Pour intégrer l'on prendra, ſelon le dernier problême, l'intégrale du premier terme $\frac{A\,dx}{M}$, en ſuppoſant x ſeul variable; prenant enſuite l'intégrale de $\frac{B\,dy}{M}$, en regardant y ſeul comme variable, l'on ſuivra la premiere méthode du dernier problême. Or en faiſant $hy = a$, $(m + h)y + \frac{ph - pm}{hm - n} = b'$, $ny^2 + \left(\frac{phh + phm - 2pn}{hm - n}\right)y - \frac{p^2}{hm - n} = q$, on aura $\frac{A\,dx}{M} = \frac{(x + a)\,dx}{xx + bx + q}$. Les fonctions du dénominateur de cette fraction rationnelle ſont $x + \frac{1}{2}b' + \sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}$, $x + \frac{1}{2}b' - \sqrt{\left(\frac{b'b'}{4} - q\right)}$; & ſuppoſant le premier $= x + r$, & le ſecond $= x + t$, la différentielle ſera $\left(\frac{x + a}{(x + r)\cdot(x + t)}\right)dx = \frac{r - a}{(r - t)(x + r)} \times dx + \frac{a - t}{(r - t)(x + t)} \times dx$, dont l'intégrale $= \left(\frac{r - a}{r - t}\right)$ L. $(x + r) + \left(\frac{a - t}{r - t}\right)$. L. $(x + t)$. Subſtituant dans cette intégrale les valeurs de r, a & t, & enſuite celles de b' & q, on aura $\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}h}{\sqrt{(h + m)^2 - 4n}}\right) \times$ L. $\left[x + \left(\frac{h + m}{2}\right)y + \frac{p(h - m)}{2hm - 2n} + \frac{1}{2}(y -$

$\frac{p}{hm-n})\sqrt{(h+m)^2-4n}\Big] + \Big(\frac{1}{2} - (\frac{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}h}{\sqrt{(h+m)^2-4n}})\Big) \times$
L. $\Big[x + (\frac{h+m}{2}) y + \frac{p(h-m)}{2hm-2n} -$
$\frac{1}{2}(y - \frac{p}{hm-n})\sqrt{(h+m)^2-4n)}\Big]$. Cette quantité étant égalée à une constante sera l'intégrale cherchée : car en différenciant on trouvera l'équation différentielle proposée ; ainsi il seroit inutile de prendre l'intégrale du terme $\frac{B\,dy}{M}$.

104. Les équations particulieres font souvent connoître la forme du multiplicateur P cherché. Reprenons pour le faire voir l'équation générale de condition $\frac{P(dA)}{dy} + \frac{A(dP)}{dy} = \frac{P(dB)}{dx} + \frac{B(dP)}{dx}$. Supposons $dP = T\,dx + V\,dy$, T & V étant des fonctions de x & de y ; il suit de ce qu'on a dit ci-dessus (88), que $\frac{(dP)}{dy} = T$, & $\frac{(dP)}{dx} = V$; donc en substituant, l'équation précédente devient $\frac{P(dA)}{dy} + AV = \frac{P(dB)}{dx} + BT$, ou $\frac{BT-AV}{P} = \frac{(dA)}{dy} - \frac{(dB)}{dx}$, équation que j'appelle (N), & qui suffit pour déterminer P dans les cas particuliers. Si l'on supposoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ce qui est le cas des équations différentielles complettes, l'on auroit $BT - AV = 0$, $T = 0$, $V = 0$, & $dP = T\,dx + V\,dy = 0$; donc alors P est l'unité ou une constante quelconque. Il est aisé de voir que

pour intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui n'eſt pas abſurde, il ſuffit de ſatisfaire à l'équation N, ce qui eſt toujours poſſible, quoique l'on n'ait pas de méthode générale pour cela. Cela réuſſit, facilement lorſque l'une des variables ne paſſe pas le premier degré, comme nous le ferons bien-tôt voir. Il en eſt de même lorſque les équations ſont *homogenes*, c'eſt-à-dire, lorſque chacun de leurs termes eſt de même degré par rapport aux variables.

Soit l'équation différentielle $p y^n dx + q y dx + r dy = 0$, telle que p, q & r ſoient des fonctions de x ſeul ſans y, nous aurons $\frac{(dA)}{dy} = npy^{n-1} + q$, $\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. En faiſant comme ci-devant $dP = T dx + V dy$, l'équation N devient $\frac{rT - py^n V - qyV}{P} = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$.

Soit $P = ty^m$, t étant une fonction de x ſans y, on aura $T = \frac{y^m dt}{dx}$, & $V = mty^{m-1}$. Subſtituant ces valeurs, on trouve l'équation $\frac{rdt}{tdx} - mpy^{n-1} - mq = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Pour faire uſage de cette équation il faut ſuppoſer $n = -m$, & l'on trouvera en diviſant par r, multipliant par dx & effaçant les termes inutiles, $\frac{dt}{t} = \frac{(1-n)qdx}{r} - \frac{dr}{r}$; donc en intégrant, $L.t = S.\frac{(1-n)qdx}{r} - L.r = S.\frac{(1-n)qdx}{r} . L.c - L.r$, ($c$ étant le nombre

dont le logarithme hyperbolique = 1). Donc $t = \frac{1}{r} c^{(1-n)\,S.\frac{q\,dx}{r}}$; & puisque $n = -m$, il est visible que $P = ty^m$ sera $= \frac{y^{1-n}}{r} c^{(1-n)\,S.\frac{q\,dx}{r}}$. Multipliant la proposée par ce facteur & intégrant, l'on aura $\frac{y^{1-n}}{1-n} c^{(1-n)\,S.\frac{q\,dx}{r}} + S.\left(\frac{p\,dx}{r} \times c^{(1-n)\,S.\frac{q\,dx}{r}}\right) = C$. L'intégrale $S.\frac{q\,dx}{r}$ ne suppose que les méthodes qu'on a déja données pour intégrer les différentielles à une seule variable; de sorte qu'il est aisé d'avoir cette intégrale.

La méthode dont on vient de faire usage réussit facilement lorsque l'une des variables ne monte qu'au premier degré. Car si l'on suppose $n = 0$, l'on aura $-m = 0$, & par conséquent $+m = 0$; donc dans ce cas le facteur P sera $= ty^0 = t$; c'est à-dire une fonction de x sans y & la proposée deviendra $pdx + qydx + rdy = 0$; donc l'intégrale sera $y\,c^{S.\frac{c\,dx}{r}} + S.\left(\frac{pdx}{r}.c^{S.\frac{q\,dx}{r}}\right) = C$. Si $n = 1$, l'on aura $1-n = 0$, & la proposée sera $p\,dx + qy\,dx + r\,dx = 0$, & le facteur $P = \frac{1}{ry}$. Multipliant l'équation différentielle précédente par ce facteur, on la réduira à cette forme $\frac{p\,dx + q\,dx}{r} + \frac{dy}{y} = 0$, dont l'intégrale $= S.\frac{(p+q)\,dx}{r} + L.\,y = C$.

105. On peut quelquefois simplifier les méthodes précédentes en partageant la proposée en plusieurs parties intégrables séparément. Soit, par exemple, l'équation $p y^q dy + p' y^{q-r} dx + p'' y^r dx = 0$, dans laquelle p, p', p'' sont des fonctions de x, q & r des exposans quelconques. On essayera le facteur $P y^n$, P étant une fonction de x sans y, & n un exposant indéterminé. Et pour plus de facilité on fera $n = -r$, de maniere que ce facteur devienne $P y^{-r}$; il est aisé de voir qu'il suffira de diviser la proposée par y^r & de regarder P comme le facteur. Divisant de plus par p & faisant $\frac{p'}{p} = t$, $\frac{p''}{p} = t'$, & multipliant par P, la proposée devient $P y^{q-r} dy + P t y^{q-r+1} dx + P t' dx = 0$. Mais P étant une fonction de x, $P t'$ le sera aussi, & S. $P t' dx$ se réduit à l'intégrale d'une différentielle à une seule variable.

La difficulté se réduit donc à rendre complette la différentielle $P y^{q-r} dy + t P y^{q-r+1} dx$; or cette différentielle sera complette si $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(P t y^{q-r+1})}{dy}$, ou si $\frac{y^{q-r}(dP)}{dx} = (q-r+1) \cdot y^{q-r} t P$, ou si $\frac{dP}{P} = (q - r + 1) t dx$; donc en intégrant, L. P = S. $(q - r + 1) t dx$ = S. $(q - r + 1) t dx$. L. c; donc $P = c^{S.(q-r+1)tdx}$. Donc en substituant cette valeur de P dans l'équa-

quation différentielle réduite, & intégrant *, on aura $\left(\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}\right).c^{S.(q-r+1).td.x} + c^{S.(q-r+1).t\,dx} \times S.t^r\,dx = C.$

Soit maintenant les deux équations $dx + ady + (bx + cy)\,T\,dt = o$, $f\,dx + a'\,dy + (b'x + c'y)\,t\,dT = o$, T étant une fonction de la variable t; je multiplie l'une de ces équations differentielles, par exemple, la premiere par une quantité conſtante, mais indéterminée g; l'ajoutant enſuite à la ſeconde, je multiplie le réſultat par P que je ſuppoſe une fonction de t, on trouvera l'équation $(gP + fP).dx + (gaP + a'P).dy + \left((gbP + b'P).x + (gcP + c'P).y.\right) \times T\,dt = o$ (A). Si l'on ſuppoſe maintenant que cette équation eſt complette, on aura les équations ſuivantes.

I. $\frac{d(gP+fP)}{dt} = \frac{d\left((gbP+b'P).x+(gcP+c'P).y\right)}{dx}$

II. $\frac{d(gaP+a'P)}{dt} = \frac{d\left((gbP+b'P)\,x+(gcP+c'P).y\right)}{dy}$

III. $\frac{d(gP+fP)}{dy} = \frac{d(gaP+a'P)}{dx}$.

* On intégrera les deux premiers termes comme s'il n'y en avoit pas d'autre; on peut intégrer le troiſième par la méthode des différentielles à une ſeule variable.

t étant regardé comme constant dans la troisième équation, & P étant une fonction de t, il est évident que les deux membres de cette équation sont égaux à o, c'est-à-dire, que la dernière équation devient o = o. La première équation donne $\frac{dP.(g+f)}{dt} = P(gb+b')$, la seconde donne $\frac{dP.(ga+a')}{dt} = (gc+c')P$. Donc $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+f}.dt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}dt$. En égalant ces valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divisant par dt, l'on a $\frac{gb+b'}{g+f} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$, équation du second degré qui en ôtant les fractions, & considérant g comme l'inconnue, fera connoître g; g étant connu, on connoîtra P : car de l'équation $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+f}dt$, l'on tire en intégrant, L. P = $\frac{gb+b'}{g+f}.t$ L. c, ou $P = c^{\left(\frac{gb+b'}{cg+f}\right)t}$. Donc l'équation A est complette & son intégrale est = $(gP+fP).x+(gaP+a'P)y = C$, en supposant que g désigne une valeur de g trouvée par l'équation du second degré dont on vient de parler. On auroit de même l'intégrale par l'autre valeur de g, il n'y auroit qu'à supposer g égal à cette nouvelle valeur g', & au lieu de la constante C écrire C' dans l'intégrale qu'on vient de trouver. Au moyen de ces deux intégrales, on éliminera facilement l'une des inconnues x ou y.

Supposons qu'on ait éliminé x, on aura une équation en y & t, qui fera connoître la valeur de y en t; substituant ensuite cette valeur dans la première ou la seconde intégrale, on aura la valeur de x en t.

106. REMARQUE. Il est quelquefois très-commode, de partager une équation différentielle en plusieurs parties, & d'examiner si on peut les rendre complettes séparément par un facteur commun : car alors l'intégration pourra devenir fort aisée. Soit l'équation différentielle $aydx+bxdy+cx^{n-1}y^{p}dx+gx^{n}y^{p-1}dy=0$, je la partage en deux parties $aydx+bxdy, cx^{n-1}y^{p}dx+gx^{n}y^{p-1}dy$. Si l'on multiplie la première partie par $x^{an-1}y^{bn-1}$ elle devient $ay^{bn}x^{an-1}dx+bx^{an}y^{bn-1}dy$ dont l'intégrale $=\frac{1}{n}x^{an}y^{bn}$. La seconde partie devient intégrable en la multipliant par le facteur $x^{c}-y^{gm-p}$ *. Maintenant pour trouver un facteur commun, je fais $an-1=cm-u, bn-1=gm-p$; donc $n=\frac{cm-u+1}{a}=\frac{gm-p+1}{b}$; donc $m=\frac{ap-bu-a+b}{ag-bc}$, & par conséquent $n=\frac{cp-gu-c+g}{ag-bc}$. Substituant ces valeurs de m & de n dans les facteurs ci-dessus, ils deviendront égaux, & l'on aura un facteur commun qui rendra l'équation complette, & son intégrale sera $\frac{1}{n}x^{an}y^{bn}+\frac{1}{m}x^{cm}y^{gm}=C$. Au reste une équation différentielle totale multipliée par un facteur devient souvent complette quoiqu'aucune de ses parties ne puisse être complettée séparément.

* n & m sont des quantités indéterminées.

107. Il eſt plus facile de trouver les conditions que doit avoir une équation pour pouvoir devenir complette par le moyen d'un facteur donné, que de trouver généralement le facteur qui doit rendre complette une équation différentielle d'un ordre donné lorſque cela eſt poſſible. Pour donner une idée de la méthode qu'on peut ſuivre dans certains cas nous allons réſoudre le problême ſuivant.

108. PROBLEME. *p, q, r, t étant ſuppoſés des fonctions de x, déterminer ces fonctions de manière que l'équation* $dy + yy\,dx + t\,dx = 0$ *devienne complette en la multipliant par un facteur* $P = \frac{1}{pyy + qy + r}$. L'on aura l'équation $\frac{d(PA)}{dy} = \frac{d(PB)}{dx}$, ou en ſubſtituant les valeurs de P & de A, $\frac{1}{dy}\,d.\left(\frac{yy+t}{py^2+qy+r}\right) = \frac{1}{dx}\,d.\frac{1}{pyy+qy+r}$; on prend la différentielle du premier membre en faiſant varier y ſeul, & celle du ſecond en regardant x ſeul comme variable. Donc $2y\,(pyy + qy + r) - (yy+t).(2py+q) = \frac{-yydp - y\,dq - dr}{dx}$. Tranſpoſant, ôtant la fraction, réduiſant & ordonnant par rapport à y, il vient,

$$\left.\begin{array}{l} qyydx + 2rydx - qtdx \\ +yydp - 2ptydx + dr \\ \qquad + y\,dq \end{array}\right\} = 0.$$ Suppoſons maintenant que p, q, r & t ſont tels que les co-efficients de chaque puiſſance de y ſoient $= 0$, l'on aura $qyydx + yydp = 0$, ou $q = -\frac{dp}{dx}$. L'on aura auſſi $-qtdx + dr = 0$, ou $q = \frac{dr}{tdx} = \frac{-dp}{dx}$; ou $dp = \frac{-dr}{t}$, & $t = \frac{-dr}{dp}$. L'équation $q = -\frac{dp}{dx}$ donne $dq = \frac{-ddp}{dx}$, en ſuppoſant dx conſtant. Subſtituant la valeur de dq & celle de t dans l'équation $2r\,dx - 2p\,tdx + dq = 0$,

que donne la seconde colonne de l'équation ci-dessus, il vient $2rdx + \frac{2pdrdx}{dp} - \frac{ddp}{dx} = 0$, ou $rdp + pdr = \frac{dp.ddp}{2dx^2}$. L'intégrale du premier membre est $= rp$, & il est facile de voir que celle du second est $= \frac{dp^2}{4dx^2} + C$, comme on le trouvera en revenant de l'intégrale à la différentielle ; donc l'on a $rp = \frac{dp^2}{4dx^2} + C$ ou $r = \frac{dp^2}{4p.dx^2} + \frac{C}{p}$, $q = -\frac{dp}{dx}$, $t = -\frac{dr}{dp} = \frac{C}{pp} + \frac{dp^2}{4ppdx^2} - \frac{ddp}{2pdx^2}$. Supposons maintenant $p = uu$, u étant une fonction quelconque de x, nous aurons $p = uu$; $q = -\frac{2udu}{dx}$; $r = \frac{C}{u^2} + \frac{du^2}{dx^2}$; $t = \frac{C}{u^4} - \frac{ddu}{u.dx^2}$. Ces valeurs étant substituées dans la proposée au lieu de p, q, r, t, l'équation $\frac{dy + yydx + tdx}{pyy + qy + r} = 0$ sera complette.

DE CE QU'ON PEUT FAIRE LORSQU'IL Y A TROP DE DIFFICULTÉ POUR TROUVER LE FACTEUR QUI DOIT RENDRE COMPLETTE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

109. On peut chercher la relation qu'il y a entre les variables de l'équation proposée. Si, par exemple, cette équation ne contient que deux variables x & y, on cherchera une valeur de y en x, par exemple, qui soit telle qu'elle rende l'équation $= 0$: Ce qui peut s'appeller aussi résoudre l'équation, ou intégrer l'équation.

110. Soit proposé d'intégrer l'équation différentielle à deux variables $Adx^m + Bdy^m + Cdx^n dy^{m-n} + Ddx^p y^{m-p} +$ &c. $= 0$, qui contient les différentielles

dx & dy élevées à des expoſans dont la ſomme dans chaque terme eſt m, les co-efficiens A, B, &c. étant des fonctions de x, ou ſimplement des conſtantes. Je ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = z$, ou $dy = z\,dx$. Subſtituant cette valeur de dy dans l'équation propoſée, elle devient $A dx^m + B z^m dx^m + C z^{m-n} dx^m + D z^{m-p} dx^m +$ &c. $= 0$. ou en diviſant par dx^m, $A + B z^m + C z^{m-n} + D z^{m-p} +$ &c. $= 0$, équation à deux variables z & x. On trouvera donc par cette équation la valeur de z en x & conſtantes. Subſtituant cette valeur dans $z\,dx$, on aura une différentielle à une ſeule variable dont l'intégrale ſera $= y$, puiſque $dy = z\,dx$.

Soit l'équation $A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dx\,dy = 0$, on aura dans l'équation générale, $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, & en faiſant $dy = z\,dx$, ſubſtituant cette valeur & diviſant enſuite par dx^2, on trouvera $A + B z^2 + Cz = 0$, ou $z^2 + \frac{Cz}{B} = -\frac{A}{B}$. Reſolvant cette équation par la méthode du ſecond degré, il vient $z = \frac{-C \pm \sqrt{(CC - 4AB)}}{2B}$, $dy = z\,dx = \frac{-C\,dx \pm dx\sqrt{(CC-4AB)}}{2B}$, $y = S.\frac{-C\,dx}{2B} \pm S.\frac{dx\sqrt{(CC-4AB)}}{2B} + E$ conſtante. Suppoſons $A = b$, $C = a$, $B = \frac{x}{2}$, l'on aura $dy = -\frac{a\,dx}{x} \pm \frac{dx}{x}\sqrt{(aa - 2bx)}$, & intégrant en ajoutant la conſtante E, $y = E - a\,L.\,x \pm S.\frac{dx}{x}.\sqrt{(aa - 2bx)}$. Or $S.\frac{dx}{x}\sqrt{(aa - 2bx)} = 2\sqrt{(aa - 2bx)} + a\,L.\frac{\sqrt{(aa-2bx)} - a}{\sqrt{(aa-2bx)} + a}$. Il eſt donc facile d'avoir la valeur de y qui eſt double, comme il eſt aiſé de le voir.

DE LA MÉTHODE DE M. NEWTON D'INTÉGRER PAR LES SÉRIES, LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI CONTIENNENT PLUSIEURS VARIABLES DANS LEURS TERMES AVEC LES DIFFÉRENCES DE CES VARIABLES ÉLEVÉES A DES PUISSANCES QUELCONQUES.

111. La méthode dont il s'agit ici ſe trouve dans le Traité de la *Méthode des Fluxions & des Séries infinies*: Elle ſuppoſe la théorie des ſuites, & ceux qui ont lu la première partie de cet ouvrage, ſont très en état de la comprendre. Si l'équation différentielle contient quelque fraction rationnelle ou irrationnelle, dont le dénominateur ſoit complexe, il faut la réduire en ſuites ou ſéries infinies par la formule du binome, ou par la diviſion. S'il y a des radicaux qui renferment des quantités complexes, on les réduira en ſéries par la formule du binome de Newton Si l'on a beſoin de trouver les racines d'une équation affectée, c'eſt-à-dire qui contient deux variables, comme ſi on demandoit la racine y de l'équation $y^3 + a^2 y + axy - x^3 + 2a^3$, qui donne $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} +$ &c, on trouvera ces ſortes de racines par des ſéries, & cela en employant les méthodes de la premiere partie de cet ouvrage.

Lorſque l'équation différentielle contient deux variables, il faut mettre d'un côté le rapport $\frac{dy}{dx}$ & de l'autre la valeur de ce rapport exprimé par une ſuite finie ou infinie.

Soit l'équation $dy^3 + axdx^2 dy + a^2 dx^2 dy - x^3 dx^3 + 2a^3 dx^3 = 0$, diviſant tout par dx^3 & faiſant $\frac{dy}{dx} = z$, il vient $z^3 + axz + aaz - x^3 + 2a^3$. Prenant la racine z de cette équation affectée, on trouve

$$z = \frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{5128a^2} + \&c.$$ *

Dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, nous appellerons *quantités relatives* dy & la variable y dont la différentielle eſt au numérateur, & *quantités corrélatives* dx, & x, dont la différentielle ſe trouve au dénominateur. Mais dans la fraction $\frac{dx}{dy}$, x & dx ſeront les quantités relatives, y & dy les quantités corrélatives.

112. Soit maintenant l'équation $dx - dy + 3x\,dx + y\,dx + x^2\,dx + xy\,dx = 0$. Pour la diſpoſer comme on vient de le dire (111), je diviſe tout par dx & j'ai en tranſpoſant $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$. L'équation étant ainſi préparée, 1°. On diſpoſera les termes ſuivant les dimenſions des variables x & y, mettant en premier lieu ceux qui ne ſont pas affectées de la variable relative & enſuite ceux où cette variable ſe trouve, en commençant toujours par ceux dont les dimenſions ſont les plus petites. Ainſi dans l'exemple propoſé, on écrira $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$.

2°. Ayant décrit un rectangle ABDC (Fig. 12) & l'ayant diviſé comme on le voit, écrivez dans le rectangle horiſontal KBFR la ſuite des termes où la variable relative ne ſe trouve pas. C'eſt ici $1 - 3x + x^2$; écrivez auſſi de haut en bas dans le rectangle vertical ERSP, l'autre ſuite de termes $+y + xy$ où ſe trouve la variable relative.

* Voyez ce qu'on a dit ſur les ſuites, Premiere Partie, Courbes Algébriques, N°. 42 & ſuivants. Si l'on réſout l'équation du troiſième degré, en regardant z comme l'inconnue, on pourra réduire en ſérie la valeur de z qui contiendra les radicaux de la formule de Cardan.

3°. Prenez le premier terme 1 de la ſuite horiſontale, multipliez-le par la variable x corrélative & diviſez le produit par l'expoſant de la corrélative dans le même produit: ici on diviſera par 1. Ecrivez le réſultat x dans le rectangle horiſontal NHDM, à côté de y; vous aurez le premier terme de la ſérie qui doit exprimer la valeur de la variable relative y.

4°. Pour avoir le ſecond terme de cette ſérie, ſubſtituez dans tous les termes de la ſérie verticale $y + xy$ placée dans le rectangle ERSP, le premier terme que vous venez de trouver au lieu de la variable relative, & écrivez la valeur de chaque terme du réſultat dans le rectangle RSQF à côté du terme qui l'a donné, & dans le rang qui convient à la dimenſion de la variable corrélative dans cette valeur. Dans notre exemple le réſultat ſera $x + xx$, on écrira $+ x$ à côté de y au ſecond rang ſous le terme $- 3x$ de même dimenſion, & le terme $+ xx$ à côté de xy ſous le terme $+ xx$ de même dimenſion de la ſuite horiſontale $1 - 3x + xx$. Prenez enſuite dans le rectangle KSQB, la ſomme des termes dans leſquels la variable corrélative a la plus petite dimenſion après le plus bas terme de la ſuite horiſontale qui eſt ici $= 1$; cette ſomme ſera dans notre exemple $-3x + x = -2x$, comme on le voit au ſecond rang dans le rectangle des ſommes SNMQ. Multipliez cette ſomme par la variable corrélative, & ayant diviſé le réſultat par l'expoſant de la corrélative dans ce même réſultat, écrivez le quotient dans le rectangle NHDM pour le ſecond terme de la ſérie qui doit exprimer la valeur de y. Dans notre exemple on multipliera $-2x$ par x & diviſant le produit $-2x^2$ par l'expoſant 2 de x, l'on écrira $-xx$ pour le ſecond terme de la ſérie cherchée.

5°. On ſubſtituera dans la ſérie $y + xy$, le ſecond terme $-x^2$ de la ſérie au lieu de la variable y, & on écrira la valeur de chaque terme du réſultat à côté de leur correſpondant & dans le rectangle RSQF, & au rang qui convient à la dimenſion de la variable corrélative. Dans notre exemple en ſubſtituant $-x^2$ dans la ſérie $y + xy$, l'on aura les termes $-x^2$, & $-x^3$; on écrira

$-x^2$ à côté de y sous le terme $+x^2$ de même dimension dans la suite horisontale $1-3x+xx$, & le terme $-x^3$ à côté de xy, & au quatrième rang. Ensuite l'on prendra dans le rectangle KSQB la somme des termes dans lesquels la variable corrélative a la plus petite dimension après ceux dont on a pris la somme dans l'opération précédente; c'est-à-dire, quand on a voulu trouver le second terme de la série. Cette somme est ici $xx-xx+xx=xx$. On la multipliera par la variable corrélative x & l'on divisera le produit x^3 par l'exposant 3 de x dans le même produit, l'on écrira le résultat $\frac{1}{3}x^3$ dans le rectangle NHDM pour le troisième terme de la série cherchée. En opérant de même on trouvera le quatrième terme $-\frac{1}{6}x^4$; & ainsi de suite, & l'on aura $y=x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-$ &c.

Voici la raison de ce procédé: puisque $\frac{dy}{dx}=1-3x+x^2+y+xy$, l'on a $dy=dx+3xdx+x^2dx+ydx+xydx$, & en intégrant il vient $y=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+S.ydx+S.xydx$, d'où l'on voit que x est le premier terme de la série qu'on cherche, & qu'on trouve ce terme en opérant comme nous l'avons fait. Si l'on suppose maintenant que la série qu'on cherche est trouvée, & qu'elle soit représentée par $x+p$, p étant la somme de tous les termes qui suivent le premier; en substituant $x+p$ au lieu de y dans les termes $+y$, $+xy$, l'on aura $y+xy=x+xx+p+xp$, & l'équation $dy=dx-3x+xxdx+(y+xy)dx$ deviendra (A) $dy=dx-3xdx+xxdx+(p+xp)dx$, $+xdx+xxdx$

& en intégrant il viendra $y=x-xx+\frac{2}{3}x^3+S.(p+xp)dx$. Ce qui fait voir que le second terme de la série cherchée est $-xx$, tel que le donne la méthode de Newton.

Supposant de même que p' désigne tous les termes de la série qui suivent le second, l'on aura $y=x-xx+p'=x+p$; donc $p=-xx+p'$, & en substituant $-xx+p'$ au lieu de p dans les deux termes $p+xp$, &

réduisant, l'équation A deviendra $dy = dx - 2xdx + x^2dx - x^3dx + (p' + xp')dx$, & en intégrant l'on trouve $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + S.(p' + xp')dx$; ce qui fait voir que le troisième terme de la série cherchée est $= \frac{1}{3}x^3$, ainsi que le donne notre opération. De même en supposant $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 + p''$, l'on trouvera que le quatrième terme est $-\frac{1}{6}x^4$, & ainsi des autres termes. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que par la nature des opérations que prescrit la méthode, on doit trouver le même résultat que par la méthode analytique dont nous venons de parler.

113. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. à l'infini, on écriroit le terme 1 dans le rectangle horisontal K R F B (Fig. 23) & l'on écriroit les autres termes dans le rectangle vertical E R S P. Multipliant 1 par x & divisant le produit x par l'exposant 1 de x, dans ce même produit, on écrira le quotient x dans le rectangle N H D M, pour le premier terme de la suite qui doit exprimer la valeur de y. On substituera le premier terme x qu'on vient de trouver, au lieu de y dans les termes du rectangle vertical E R S P, écrivant la valeur de chaque terme à côté du terme correspondant dans le rectangle R S Q F, au rang qui convient à la dimension de la corrélative dans la valeur de ce terme. Pour trouver le second terme de la série, on multipliera $\frac{x}{a}$ par x & divisant le produit $\frac{x^2}{a}$ par l'exposant 2, on écrira le quotient $\frac{xx}{2a}$ à côté du premier terme de la série, & continuant d'opérer en substituant $\frac{xx}{2a}$ au lieu de y dans les termes du rectangle E R S P; écrivant les résultats ainsi qu'on le voit dans le rectangle R F Q S, prenant la somme des termes du troisième rang,

qui eſt $+\frac{xx}{2aa}+\frac{xx}{aa}=\frac{3xx}{2aa}$, on la multipliera par x, & diviſant la produit $\frac{3x^3}{2aa}$ par l'expoſant 3, le quotient $\frac{x^3}{2aa}$ ſera le troiſième terme de la ſuite cherchée; & en continuant de même, on aura $y=x+\frac{xx}{2a}+\frac{x^3}{2aa}+\frac{x^4}{2aa^2}+\frac{x^5}{2a^4}+\frac{x^6}{2a^5}$ &c.

Dans cet exemple on ne s'eſt propoſé de pouſſer la ſérie que juſqu'à la ſixième dimenſion de x, & c'eſt pour cela qu'on a omis dans l'opération tous les termes qu'on prévoyoit devoir être inutiles pour cette fin, comme on l'a indiqué par le ſigne &c. qu'on a ajouté à toutes les ſéries interrompues.

114. Lorſque la variable relative a des expoſans fractionnaires, on peut faire diſparoître ces expoſans par la méthode du n°. 55. Si l'équation propoſée étoit $\frac{dy}{dx}=3xy^{\frac{2}{3}}+y$, la progreſſion arithmétique dans laquelle ſe trouvent les expoſans de y ſeroit $\frac{1}{3}.0.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.1$, prenant le terme qui approche le plus de 0 *, je fais $u=y^{\frac{1}{3}}$, ou $y=u^3$; donc $dy=3uudu$. Subſtituant ces valeurs de y & de dy dans la propoſée, elle devient $\frac{3uudu}{dx}=3xuu+u^3$, & en diviſant par $3uu$, l'on a $\frac{du}{dx}=x+\frac{1}{3}u$, & cherchant la valeur de la relative u, par la méthode de Newton, l'on trouvera la ſérie $u=$

* En général ſi le terme le plus approchant de 0 eſt $\frac{p}{q}$, on fera $y^{\frac{p}{q}}=u^p$, ou $y^p=u^{pq}$.

$\frac{1}{2} xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240}$ &c. mais $u = y^{\frac{1}{3}}$; donc $y = u^3 = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \text{\&c.}\right)^3 = \frac{1}{8} x^6 + \frac{1}{24} x^7 + \frac{7}{864} x^8$ &c.

A l'égard des expoſans fractionnaires de la quantité corrélative x, on les diſpoſera ſelon leurs dimenſions. Par exemple ſi l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 + y + y^2 + x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{2}}$, on la diſpoſeroit ainſi $\frac{dy}{dx} = 1 + x^{\frac{2}{3}} + x + x^{\frac{5}{2}} + y + y^2$, & l'on opéreroit à l'ordinaire.

Soit l'équation $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$. Suppoſant $y^{\frac{1}{2}} = u$, l'on aura $uu = y$, $dy = 2u\,du$, & l'équation propoſée deviendra $\frac{2u\,du}{dx} = 2u + u x^{\frac{1}{2}}$, ou $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$; donc $du = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, & en intégrant, $u = y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$, & en quarrant de part & d'autre, $y = xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$. Mais parce qu'on peut ajouter une conſtante à l'intégrale, l'on a $u = y^{\frac{1}{2}} = C + x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$, & en quarrant, $y = C^2 + 2Cx + \frac{2}{3} C x^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, ſérie bien différente de la première & qui ne peut lui devenir égale que lorſque $C = 0$.

De même, dans l'exemple ci-deſſus, où nous avons trouvé $y = u^3 = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \text{\&c.}\right)^3$, le réſultat

ſera bien bien différent ſi l'on ajoute la conſtante C à la valeur de u, pour avoir $u = \left(C + \frac{1}{2} x^2 + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)$, alors on aura $y = \left(C + \frac{1}{2} xx + \frac{x^3}{18} + \&c.\right)^3$, ſérie qu'on variera à l'infini en donnant différentes valeurs à C. Il faut avoir l'attention d'ajouter une conſtante lorſqu'on a trouvé la valeur de la relative u, avant de prendre enſuite celle de y. Mais ſi y ne contenoit aucun expoſant fractionnaire, alors on ajouteroit la conſtante C à la ſérie qui exprime la valeur de y; car ſi l'on a l'équation $\frac{dy}{dx} = u$, u déſignant une ſuite de termes compoſés de x, y & conſtantes, l'on aura $dy = u dx$, & $y = C + S.u dx$, en ajoutant la conſtante C.

115. Si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = y + ay^2 + xy^4$, comme il n'y a aucun terme qui ne ſoit affecté de y, l'on n'en peut mettre aucun dans le rectangle horiſontal K R F B. Dans ce cas l'on prendra pour le premier terme de la ſérie, une conſtante arbitraire, autrement l'on ne pourroit avoir le premier terme de la racine.

De plus, on peut prendre même dans les autres cas, pour le premier terme de la ſérie cherchée, telle quantité conſtante qu'on voudra, ſubſtituer enſuite cette conſtante au lieu de la relative dans les termes du rectangle vertical E R S P, & continuer l'opération à l'ordinaire, pour trouver les autres termes de la ſérie cherchée.

Ainſi dans l'équation ci-deſſus $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + x^2 + y + xy$, ſi l'on prend (Fig. 14), 1 pour le premier terme de la ſérie, en ſubſtituant 1 au lieu de y dans les termes $+ y$, $+ xy$, l'on aura $+ 1 + x$. On écrira 1 à côté de y ſous le terme 1 de la ſérie horiſontale $1 - 3x + x^2$, & $+ x$ à côté de xy, ſous le terme $- 3x$; enſuite on prendra la ſomme $+ 1 + 1 = 2$ des plus bas termes, & multipliant cette ſomme par la corrélative x, l'on diviſera le produit $2x$ par l'expoſant de x dans ce produit, & l'on écrira le réſultat $+ 2x$

dans le rectangle N H D M pour le second terme de la série, & en continuant les opérations à l'ordinaire, l'on aura $y = 1 + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{3} + \frac{1}{4}x^{4}$ &c. Si au lieu de prendre 1 pour premier terme l'on eût pris a, l'on auroit trouvé une série différente.

Cela prouve qu'en général il y a une infinité de valeurs différentes de y qui peuvent résoudre une équation à deux variables, & en effet une telle équation exprime un problême indéterminé, & ces sortes de problêmes ont une infinité de solutions.

116. Si dans l'équation $\frac{dy}{dx} = p$, la suite p contient quelque terme qui ait pour dénominateur quelque puissance de l'une des variables, on réduira ce terme en une série infinie, en substituant, au lieu de cette variable, une autre variable plus ou moins une constante arbitraire. Par exemple, si l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = 3y + 2x + \frac{x}{y}$, l'on pourroit faire $y = z \pm c$, & le terme $\frac{x}{y}$ seroit $= x.(z \pm c)^{-1}$. Supposons qu'on fasse $y = 1 + z$, on élévera $1 + z$ à la puissance -1 par le binome de Newton, & l'on multipliera tous les termes de la série résultante par x, de plus, on substituera $1 + z$ au lieu de y dans le terme $3y$. Si l'on avoit fait $y = a - z$, l'on auroit eu $dy = -dz$, & le premier membre de l'équation seroit devenu négatif & $= -\frac{dz}{dx}$; mais on l'auroit rendu positif en changeant les signes de tous les termes du second membre.

117. On peut quelquefois trouver l'intégrale d'une équation fort facilement sans avoir recours à la méthode de Newton. Soit, par exemple, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{5x}$, je suppose $y = bx^{m}$, le coefficient b & l'exposant m étant des quantités indéterminées. Substituant bx^{m} au lieu de y dans la proposée, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}bx^{m-1}$, ou dy

$= \frac{4}{5} b x^{m-1} dx$, & $y = \frac{4}{5^m} b x^m = b x^m$; donc $\frac{4}{5^m} = 1$, ou $\frac{4}{5} = m$, & $y = b x^{\frac{4}{5}}$, b étant indéterminé, & l'on pourra donner à b telle valeur qu'on voudra.

On doit remarquer auſſi que ſi la quantité qu'on doit ſubſtituer dans le rectangle vertical E R S P au lieu de y, étoit complexe, il faudroit prendre ſon quarré, lorſque le terme dans lequel ſe fait la ſubſtitution contient y^2, ſon cube, ſi le terme contient y^3, &c.

On peut quelquefois commencer l'opération par la plus haute puiſſance de la quantité corrélative, en deſcendant par degré aux puiſſances inférieures. Par exemple, ſi l'on avoit l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$. Après avoir diſpoſé les termes d'une maniere contraire à l'ordinaire, en commençant par le plus haut terme $2x$, comme on le voit (Fig. 15), on trouveroit, ſuivant la méthode, xx pour le premier terme de la valeur de y. Pour trouver le ſecond terme on ſubſtituera xx au lieu de y dans le terme $+ \frac{y}{xx}$ du rectangle E R S P, & on écrira le réſultat 1 dans le rectangle R S Q F au ſecond rang ſous le terme $+3$, on prendra la ſomme 4 des deux termes correſpondans $+1$ & $+3$, on la multipliera par x, & ayant diviſé le produit $4x$ par l'expoſant 1 de x dans le même produit, on aura $+4x$ pour le ſecond terme de la ſérie cherchée, on trouvera les autres termes en ſuivant la regle preſcrite.

REMARQUE I. Lorſque la ſuite des expoſans dans une ſérie eſt interrompue, on peut mettre o à la place du terme qui manque, en lui donnant le ſigne + ou — comme on voudra.

REMARQUE II. Parmi les ſuites qui expriment la valeur de y en x, ou la valeur de x en y, on préférera celles qui donnent x en y, ſi elles ſont plus convergentes que celles qui donnent y en x. Par exemple, la ſérie $xx + 4x + o - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx}$ &c. qui déſigne la valeur de y ſera conver-

gente en supposant $x > 1$. En observant ce qu'on a dit ci-dessus (115), c'est-à-dire, en écrivant a, par exemple, pour le premier terme d'une série qui doit donner la valeur de y, on pourra ensuite, en donnant à a différentes valeurs, avoir autant de séries différentes qu'on voudra. On trouve encore des séries finies comme celle qu'on a trouvée ci-dessus (114).

118. PROBLEME. *Intégrer les équations qui contiennent plus de deux variables avec leurs premières différences & leurs produits quelconques.* Lorsque l'équation proposée contient trois variables, si la relation de deux de ces variables est connue, on se servira de cette relation pour trouver le rapport des différences de ces deux variables, & pour éliminer l'une de ces variables avec sa différence; ainsi l'on n'aura plus qu'une équation à deux variables qu'on pourra intégrer par quelqu'une des méthodes précédentes. Si cette relation est inconnue, on pourra la former à volonté, & réduire, par le moyen de cette relation, l'équation proposée à la forme de l'une de celles que nous avons intégrées dans les deux derniers problèmes. Si l'équation contient quatre variables, on la réduira à trois par la relation donnée ou prise à volonté entre deux de ses variables, & on réduira ensuite celle-ci à deux variables. Si la proposée contient cinq variables, on la réduira à quatre par une relation supposée, si elle n'est donnée par l'état de la question; on réduira ensuite le nombre des variables à trois & enfin à deux, & ainsi de suite, quelque nombre que l'on ait de variables.

Soit l'équation à trois variables $2dx - dz + xdy = 0$, dans laquelle la relation entre deux de ses variables n'est point déterminée. On formera à volonté cette relation, en supposant, par exemple, $y = x$, ou $x = yy$, ou, &c. ou bien entre y & z, en supposant $y = z + a$, $y = 3z + b$, $y = z^2$ &c. Supposons qu'on préfere la relation $x = yy$; l'on aura $dx = 2ydy$. Substituant ces valeurs de x & de dx dans la proposée, il vient $4ydy - dz + yydy = 0$, & en intégrant $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$, ou $z = 2yy + \frac{y^3}{3}$ pour la relation de z & de y, & en écrivant x

pour y^2 & $x^{\frac{3}{2}}$ pour y^3, l'on aura $2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} = z$, équation entre z & x; on auroit trouvé des réſultats différents en égalant l'intégrale à une conſtante. Dans le nombre infini de relations que peuvent avoir les trois variables x, y, z; nous en avons trouvé une qui eſt repréſentée par les équations $x = yy$, $2yy + \frac{y^3}{3} = z$, $2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} = z$; & comme on peut en trouver une infinité d'autres, il eſt évident que c'eſt un cas particulier de l'intégrale générale de l'équation propoſée.

Nous terminerons cette matière en remarquant que lorſque l'on aura réduit l'equation propoſée, à la forme $\frac{dy}{dx} = p$, p étant une ſuite finie ou infinie de termes compoſés des variables x & y, on aura $dy = p\,dx$, & $y = S.\,p\,dx + C$. Si l'on peut avoir l'intégrale $S.\,p\,dx$, il ſera inutile d'employer la méthode de Newton. Ce ſera la même choſe ſi l'on peut avoir l'intégrale de l'équation $dy - p\,dx = 0$, par le moyen d'un multiplicateur ou ſans ce multiplicateur. Ce ſera encore la même choſe lorſque la propoſée contenant plus de deux variables, aura été réduite à deux variables, & qu'on pourra en trouver l'intégrale par les méthodes ci-deſſus.

DE LA SÉPARATION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

119. Soit l'équation $aydx = bxdy$, on ſéparera facilement les variables en diviſant les deux membres par x & y, ce qui donnera $\frac{a\,dx}{x} = \frac{b\,dy}{y}$, équation où les indéterminées ſont ſéparées & qu'on peut facilement intégrer. Si l'on avoit cette autre équa-

tion $\frac{b\,dy}{x^m y} = a\,dx$, en multipliant par x^m, l'on auroit $\frac{b\,dy}{y} = a x^m dx$, équation dont les variables ſont ſéparées, & qu'il eſt aiſé d'intégrer, par la méthode des différentielles à une ſeule variable.

Il eſt bon de remarquer qu'il peut arriver qu'aucun des deux membres de l'équation ſéparée ne ſoit intégrable algébriquement, quoique l'équation qui a produit la différentielle ſoit, ou algébrique, ou réductible à une forme algébrique.

Dans la première équation ſéparée, l'on a $\frac{a\,dx}{x} = \frac{b\,dy}{y}$, & en intégrant, $a\mathrm{L}.x = b\mathrm{L}.y + \mathrm{L}.f$, la conſtante qu'on ajoute peut être un logarithme, ou $\mathrm{L}.\,x^a = \mathrm{L}\,fy^b$; donc $x^a = fy^b$, équation algébrique. Si l'on vouloit intégrer l'autre équation ſéparée $\frac{b\,dy}{y} = ax^m dx$, l'on trouveroit facilement $b\,\mathrm{L}\,y = \frac{a}{m+1} x^{m+1} = f x^p$ L. c, (en faiſant $f = \frac{a}{m+1}$, $m + 1 = p$, & c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$); donc $y^b = c^{f x^p}$.

Il eſt aiſé de voir par ce qu'on vient de dire, que la ſéparation des variables, conſiſte à faire enſorte que chaque terme d'une équation ne contienne qu'une ſeule variable. Il n'eſt pas moins évident qu'on peut intégrer du moins par les quadratures

dratures toute différentielle dont les variables ſont ſéparées.

Toute équation de cette forme $PR\,dx = QV\,dy$, pourra être ſéparée ſi P & V ſont des fonctions de x ſans y, & R & Q des fonctions de y ſans x: car en diviſant par R V, l'on a $\frac{(P\,dx)}{V} = \frac{(Q\,dy)}{R}$, équation dans laquelle les variables ſont ſéparées: ainſi l'équation $x^2 y^3\,dx = a y^5 x^3\,dy$ admet la ſéparation des variables. En effet en diviſant par $y^3 x^3$, l'on a $\frac{x^2}{x^3}\,dx = \frac{a y^5}{y^3}\,dy$; ou $\frac{dx}{x} = a y^2\,dy$.

Les moyens dont on ſe ſert pour la ſéparation, ſont les regles ordinaires de l'algebre & les ſubſtitutions.

120. PROBLÊME. *Séparer les indéterminées dans les équations homogenes à deux variables* x *&* y. On appelle *équations homogenes* celles dans leſquelles la ſomme des dimenſions des variables, ſoit qu'elles ſoient mêlées ou qu'elles ſe trouvent ſeules, eſt la même dans tous les termes. Repréſentant toutes ces équations par $A\,dx + B\,dy = 0$, & ſuppoſant que la ſomme de ces dimenſions eſt $= n$, faiſant $y = x u$, ou $\frac{y}{x} = u$; en ſubſtituant la valeur de y, les fonctions A & B deviendront $A = x^n V$, & $B = x^n V'$, V & V' étant des fonctions de u ſans x ni y: car puiſque A & B

ſont des fonctions homogenes de la dimenſion n, V & V' des fonctions de u ou de $\frac{y}{x}$, il eſt clair que V & V' doivent être des fonctions de dimenſion nulle de y & de x, c'eſt-à-dire telles que y & x ayent le même nombre de dimenſions au numérateur & au dénominateur. Cela poſé, notre équation deviendra $x^n V\,dx + x^n V'\,dy = 0$, ou $V\,dx + V'\,dy = 0$. Mais l'équation $y = xu$, donne $x = \frac{y}{u}$, & $dx = \frac{u\,dy - y\,du}{uu}$; donc en ſubſtituant la valeur de dx, l'on a $\frac{V\,u\,dy - V\,y\,du}{uu} + V'\,dy = 0$. Otant la fraction & tranſpoſant, il vient $V\,u\,dy + uuV'dy = V\,y\,du$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{V\,du}{Vu + uuV'}$. Mais V & V' ſont des fonctions de u; donc les variables ſont ſéparables dans ces ſortes d'équations.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^3\,dx + y^2\,x\,dy + b\,x^3\,dy = 0$. Si l'on compare cette équation avec $A\,dx + B\,dy = 0$, l'on trouve $A = y^3$, $B = y^2\,x + bx^3$, $n = 3$, $A = x^3\,V$, $B = x^3\,V'$; donc $V = \frac{y^3}{x^3}$, $V' = \frac{y^2\,x + bx^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} + b$. Mais $\frac{y}{x} = u$; donc $V = u^3$, & $V' = u^2 + b$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{V\,du}{Vu + uuV'} = \frac{dy}{y}$, il vient $\frac{u\,du}{2uu + b} = \frac{dy}{y}$;

& en intégrant, $L.y = \frac{1}{4} L.(2uu + b) + L.C$, ou $y = C(2uu + b)^{\frac{1}{4}}$, & $y^4 = C^4.\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$, en remettant la valeur de u.

121. PROBLÈME. *Intégrer les équations différentielles homogenes à trois & tant de variables qu'on voudra, lorsque* A, B, C, *sont des fonctions homogenes de* x, y & z *dans tous les termes.* Soit $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, l'équation qu'on demande d'intégrer, A, B, C étant des fonctions homogenes des variables x, y & z, nous prenons une équation à trois variables seulement, mais celles qui en ont d'avantage ne demandent pas d'autres calculs. On examinera d'abord si la proposée est possible en cherchant si elle donne l'équation de condition ci-dessus dont nous avons parlé ci-dessus. Si elle étoit absurde, on l'abandonneroit. Ensuite on fera $y = xu$, & $z = xt$, & l'on substituera ces valeurs dans l'équation proposée. Supposons maintenant que A, B, C soient des fonctions de la dimension m, il est évident que l'on aura $A = x^m f$, $B = x^m g$, $C = x^m h$, f, g, h étant des fonctions de u & de t. Substituons aussi la valeur $x\,du + u\,dx$ de dy & la valeur $x\,dt + t\,dx$ de dz, on aura la transformée suivante $x^m\,dx\,(f + gu + ht) + x^{m+1}\,g\,du + x^{m+1}\,h\,dt = 0$, ou en divisant par x^{m+1}, & par le multiplicateur de $x^m\,dx$, $\frac{dx}{x} + \frac{g\,du + h\,dt}{f + gu + ht} = 0$. Il est visible que le premier terme ne contient qu'une seule variable x,

& que x ne ſe trouve que dans ce terme. L'intégrale de cette équation eſt $L.x + S.\frac{gdu+hdt}{f+gu+ht} = D$ conſtante; donc. $L.x - D = S.\frac{gdu+hdt}{f+gu+ht}$; donc la différentielle $\frac{gdu+hdt}{f+gu+ht}$ eſt complette, & l'on trouvera ſon intégrale par quelqu'une des méthodes précédentes.

122. COROLLAIRE I. De ce que $\frac{dx}{x} + \frac{gdu+hdt}{f+gu+ht} = 0$, eſt une différentielle complette, on peut tirer tout de ſuite le facteur P, par lequel il faudroit multiplier la propoſée pour l'intégrer ſans la ſéparation des indéterminées * : car l'équation n'eſt devenue complette qu'en diviſant par $x^{m+1}(f+gu+ht)$, ou par $xA + yB + zC$; puiſque $x^{m+1}f = xA$, $x^{m+1}gu = x^m gux = Bux = By$, & $x^{m+1}ht = x^m htx = Ctx = Cz$; donc $\frac{Adx+Bdy+Cdz}{Ax+By+Cz}$ eſt une différentielle complette; donc le facteur P qui avoit diſparu par l'égalité à 0 étoit $= \frac{1}{Ax+By+Cz}$.

123. COROLLAIRE II. De-là ſuit le beau théorême de M. Fontaine, ſçavoir que ſi Adx

* Il s'agit de la ſéparation de x; car les u & t peuvent être mêlés entre eux.

$+ B\,dy + C\,dz$ eſt une différentielle homogene ſans conſtantes, & telle que m ſoit le degré des fonctions A, B, C, l'intégrale de cette différentielle ſera $\frac{Ax+By+Cz}{m+1}$; en effet, en ſubſtituant xu au lieu de y, & tx au lieu de z, la différentielle devient $x^m\,dx\,(f+gu+ht) + x^{m+1}\,g\,du + x^{m+1}\,h\,dt$; mais cette différentielle ne peut être intégrable à moins que ſon intégrale ne ſoit $\frac{x^{m+1}(f+gu+ht)}{m+1}$, que l'on trouve en intégrant la quantité $x^m\,dx\,(f+gu+ht)$ en regardant x ſeul comme variable. De plus il eſt viſible qu'il ne lui faut ajouter aucune fonction de u & de t, puiſque ſi on lui en ajoutoit une, lorſqu'on différencieroit l'intégrale, ce qui viendroit de cette addition ne ſeroit pas multiplié par x^{m+1} comme le ſont les termes $x^{m+1}g\,du$, & $x^{m+1}\,h\,dt$. Cela poſé, remettons dans $\frac{1}{m+1}\,x^{m+1}\,(f+gu+ht)$, la fraction $\frac{y}{x}$ au lieu de u, $\frac{z}{x}$ au lieu de t, A au lieu de $x^m f$, B au lieu de $x^m g$, & C au lieu de $x^m h$, & nous aurons $\frac{Ax+By+Cz}{m+1}$ *, pour l'intégrale de la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

124. COROLLAIRE III. Puiſque A, B, C, &c. étant des fonctions homogenes de dimenſion m

* On doit ſe ſouvenir d'ajouter une conſtante.

de variables ſans conſtantes, la différentielle $A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du +$ &c. a toujours pour intégrale $\frac{Ax + By + Cz + Du + \text{\&c}}{m+1}$, il eſt évident qu'on trouvera l'intégrale de ces ſortes de différentielles en ſubſtituant au lieu de dx, dy, dz, &c. les variables x, y, z, &c. & diviſant le réſultat par le nombre qui déſigne le degré de dimenſion de cette fonction ainſi réduite. Donc ſi V eſt une fonction homogene des variables x, y, z; de ſorte que l'on ait $dV = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, on aura $V = \frac{Ax + By + Cz}{n}$, n étant la dimenſion homogene de cette fonction. Or il eſt viſible qu'en ſubſtituant x, y, z, au lieu de dx, dy, dz, le degré de dimenſion n'a pu augmenter que d'une unité; donc $m + 1 = n$.

Soit la différentielle $dV = 2x\,dx$. L. $\frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(y\,dx - x\,dy)}{y^2 - xx}$, dans laquelle il n'y a aucune lettre conſtante, l'on aura en ſubſtituant x au lieu de dx, y au lieu de dy, & diviſant par 2, parce que la dimenſion réduite eſt du ſecond degré, $V = xx$. L. $\frac{y+x}{y-x}$. On peut voir, par cet exemple, qu'il eſt facile, en ſuivant cette méthode, d'intégrer toutes les différentielles de cette eſpece, & d'un nombre quelconque de variables, ce qui ſeroit ſouvent très-difficile par d'autres méthodes.

Lorſque V ſera une fonction de la ſeule variable x, les corollaires précédens pourront

avoir lieu, en ſuppoſant même que cette fonction eſt de cette forme $V = ax^m L.x$. En effet ſi l'on ſuppoſoit $dV = ax^2 L.x.dx$, l'on auroit, ſelon la méthode expliquée, $V = \frac{ax^3 L.x}{4}$. Ce qui eſt vrai, car la différentielle de $\frac{ax^3 L.x}{4}$ eſt $\frac{3ax^2 L.x}{4} + \frac{ax^2 dx}{4} = ax^2 L.x.dx$.

125. PROBLEME. *Séparer les variables de l'équation* $dy(y-x) = \frac{mdx(1+yy)\sqrt{(1+yy)}}{\sqrt{(1+xx)}}$.

Suppoſons $y = \frac{x-u}{1+xu}$, l'on aura $y - x = \frac{-u(1+xx)}{1+xu}$, $1+yy = \frac{(1+xx).(1+uu)}{(1+xu)^2}$, & $dy = \frac{dx(1+uu) - du(1+xx)}{(1+xu)^2}$. En ſubſtituant ces valeurs dans la propoſée, elle devient $-udx(1+uu) + udu(1+xx) = mdx(1+uu)\sqrt{(1+uu)}$; d'où l'on tire $\frac{dx}{1+xx} = \frac{udu}{(1+uu)\left(m\sqrt{(1+uu)}+u\right)}$, équation ſéparée. Si dans cette équation l'on fait $1+uu = tt$, l'on aura $\frac{dx}{1+xx} = \frac{dt}{t\left(mt+\sqrt{(tt-1)}\right)}$, & faiſant dans celle-ci $t = \frac{1+zz}{2z}$, l'on a $\frac{dx}{1+xx} = -$

$\frac{2\,dz(1-zz)}{(1+zz)\left(m+1+(m-1)zz\right)}$, équation dont chaque membre s'integre par la méthode des fractions rationnelles à une ſeule variable; il eſt donc facile d'intégrer l'équation propoſée. En effet lorſqu'on aura trouvé une valeur de z, on aura celle de t, enſuite celle de u, & enfin celle de y.

126. PROBLÊME, *Rendre homogene l'équation* $dx(a+bx+cy)=(f+x+hy)\,dy$ *qui peut être regardée comme l'équation générale du premier ordre* * *& à deux variables.* Je fais $a+bx+cy=t$, $f+x+hy=u$, pour avoir $t\,dx=u\,dy$; or la ſubſtitution donne $x=\frac{ht-cu+ah+cf}{bh-c}$ & $y=\frac{bu-t+a-bf}{bh-c}$; d'où l'on tire en différentiant, $dx:dy::hdt-cdu:bdu-dt$; mais l'équation $tdx=udy$, donne $dx:dy::u:t$, donc $u:t::hdt-cdu:bdu-dt$, ou $dt(ht+u)=du(bu+ct)$, équation homogene dont on peut par conſéquent ſéparer les indéterminées. Si l'on ſuppoſe $bh-c=0$, x & y ſeront infinis & dans ce cas la méthode qu'on vient d'employer eſt inutile. Mais alors l'on a $bh=c$, $\frac{bh}{c}=1$. Donc ſi l'on fait $m=\frac{h}{c}$, l'équation propoſée

* Car ſi le terme où x ſe trouve ſans coefficient, avoit un coefficient, en diviſant toute l'équation par ce coefficient, on lui donneroit la forme de la propoſée.

pourra dans ce cas se réduire à cette forme, $a\,dx + dx(bx+cy) = f\,dy + m(bx+cy)\,dy$. Et supposant $bx+cy = z$, l'on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{a+(bx+cy)}{f+m(bx+cy)} = \frac{a+z}{f+mz}$. De plus $dy = \frac{dz-b\,dx}{c}$; donc $dy = \frac{(a+z)\,dx}{f+mz} = \frac{dz-b\,dx}{c}$, & $dx = \frac{dz\,(f+mz)}{ac+bf+(c+mb)z}$, équation séparée. Ainsi l'équation générale du premier ordre ne peut être rendue homogene dans les cas où l'on a $bh = c$, mais alors elle peut être séparée.

Si l'on vouloit intégrer l'équation homogene $(z+au).dz+(bz+cu).du = 0$, sans séparer les indéterminées, on le pourroit facilement, car selon ce qu'on a dit ci-dessus (122), lorsque les variables sont x, y, z, &c. le facteur P est dans ces sortes d'équations $= \frac{1}{Ax+By+Cz+\&c.}$, & par conséquent dans le cas présent $= \frac{1}{Ax+By} = \frac{1}{z(z+au)+u(bz+cu)}$, en changeant x en z & y en u.

Si l'on avoit $Ax+By = 0$, le facteur P seroit infini. Par exemple, dans l'équation $y\,dx - x\,dy = 0$, le facteur $\frac{1}{Ax+By}$ est $= \frac{1}{xy-xy} = \frac{1}{0\times yx} = \infty$. On pourra néanmoins intégrer dans ce cas en prenant un multiple fini de ce facteur. Supposons qu'on

prenne pour multiplicateur de la proposée la quantité $x^0 y^2$ (*), la différentielle complette sera $= \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ dont l'intégrale $= \frac{x}{y}$. Si l'on prenoit le multiplicateur $\frac{1}{xy}$, l'on auroit $\frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est $= L.x - L.y = L.\frac{x}{y}$.

127. PROBLÊME. *Trouver les conditions que doivent avoir les exposans des variables dans les équations différentielles à deux variables seulement pour qu'on puisse les rendre homogenes par la substitution de* z^h *au lieu de* y, h *étant un exposant indéterminé.* 1°. Lorsque les équations n'ont que trois termes, on peut les représenter par cette formule générale $a y^n x^m dx + b y^q x^p dx + c x^r y^s dy = 0$, les exposans des variables étant des nombres quelconques, ou 0. Puisque nous supposons $y = z^h$, nous aurons $dy = h z^{h-1} dz$, $y^n = z^{nh}$, $y^q = z^{qh}$, $y^s = z^{hs}$, & notre équation deviendra $a z^{nh} x^m dx + b z^{hq} x^p dx + ch x^r z^{hs+h-1} dz = 0$. Pour que cette equation soit homogene, il faut que la somme des exposans soit la même dans chaque terme ; donc on doit

* En regardant o comme une quantité a infiniment petite, l'on a $a.xy = 0.xy$, & multipliant $\frac{1}{a.xy}$ par $a.xy^3$, l'on a $x^0 y^2 = y^2$.

avoir ces deux équations $nh+m=hq+p$, & $nh+m=r+ks+h-1$. La premiere donne $h=\frac{p-m}{n-q}$, & en ſubſtituant cette valeur de h dans la ſeconde, on trouvera $(s-q+1)\times(p-m)=(p-r+1).(n-q)$, équation qui exprime la condition que doivent avoir les expoſans de la propoſée pour qu'on puiſſe la rendre homogene par la ſuppoſition de $y=z^b$, h étant $=\frac{p-m}{n-q}$.

Cette ſubſtitution eſt cependant impoſſible lorſque $p=m$, ou $n=q$; mais alors on peut ſéparer facilement les indéterminées : car ſi $p=m$, l'on aura (en ſubſtituant m au lieu de p, diviſant enſuite par x^r & par (ay^n+by^q), $x^{m-r}dx+\frac{cy^t dy}{ay^n+by^q}=0$. Si $n=q$ en diviſant par x^r, & par y^n, la propoſée devient $ax^{m-r}dx+bx^{p-r}dx+cy^{t-n}dy=0$.

2°. Si les équations ont quatre termes, on peut toujours les repréſenter par cette formule $ay^n x^m dx+by^q x^p dx+cx^r y^s dy+fx^t y^u dy=0$, la ſuppoſition de $y=z^b$ donnera $az^{nb}x^m dx+bz^{bq}x^p dx+chx^r z^{bs+b-1}dz+fhx^t\times z^{bu+b-1}=0$.

Pour que cette équation ſoit homogene, il eſt néceſſaire que l'on ait les trois équations $hn+m=hq+p=r+hs+h-1=t+hu+h-1$. La première donne $h=\frac{p-m}{n-q}$; la ſeconde équation $hq+p=t+hu+h-1$, en

ſubſtituant la valeur de h & réduiſant, donne $(p - r + 1).(n - q) = (s - q + 1).(p - m)$ pour la première condition des expoſans. L'équation $hq + p = t + hn + h - 1$, après la ſubſtitution de la valeur de h & la réduction, donne $(p - t + 1).(n - q) = (u - q + 1).(p - m)$ pour la ſeconde condition des expoſans; & s'ils ont ces deux conditions, l'équation de quatre termes, devindra homogene par la ſuppoſition de $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. On trouvera de la même manière que les expoſans doivent avoir trois conditions pour les équations à cinq termes, quatre conditions pour les équations à ſix termes & ainſi de ſuite; deſorte que le nombre des termes étant N, le nombre des équations de condition ſera N — 2.

Pour ſçavoir ſi l'équation de trois termes $4y^3 x^{\frac{1}{2}} dx + 3y^2 dx - bx^{\frac{1}{2}} dy = 0$, peut devenir homogene en faiſant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$. Je remarque que l'on a ici $n = 3$, $m = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $p = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $s = 0$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation de condition, on trouve qu'elle eſt vraie: car l'on a $(s - q + 1).(p - m) = (p - r + 1).(n - q)$, ou $(0 - 2 + 1) \times (0 - \frac{1}{2}) = (0 - \frac{1}{2} + 1).(3 - 2)$, ou $-1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}.+1$, ou $+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; donc en faiſant $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$, l'équation propoſée deviendra homogene. En effet l'on aura $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $y^2 = z^{-1}$ & $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$. Donc en ſubſti-

tuant ces valeurs dans la proposée, l'on aura $4z^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx + 3z^{-1}dx + 3x^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}dx = 0$, équation homogene.

128. PROBLÊME. *Séparer les indéterminés dans l'équation différentielle à deux variables* $apy^n dy + by^{n+1}p'dx + cy^q p''dx = 0$, *dans laquelle* p, p', p'' *sont des fonctions de* x *sans* y. 1°. En divisant la proposée par y^q & par ap, il vient $y^{n-q}dy + \frac{by^{n-q+1}p'dx}{ap} + \frac{cp''dx}{ap} = 0$, dans laquelle le premier & le dernier terme ne contiennent chacun qu'une seule variable.

Maintenant il est visible que si on pouvoit trouver une fonction V de x sans y, telle qu'en multipliant cette équation ainsi réduite, elle rendit les deux premiers termes une différentielle exacte, on trouveroit l'intégrale en prenant celle des deux premiers termes & celle du terme $\frac{cVp''dx}{ap}$. Le premier terme après la multiplication, sera $= Vy^{n-q}dy$, & le second sera $= \frac{by^{n-q+1}Vdx}{ap}$, & la différentielle exacte sera $Adx + Bdy$, en faisant le multiplicateur $\frac{by^{n-q+1}V}{ap} = A$, & $Vy^{n-q} = B$. Il faut donc (88), que l'on ait $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou $\frac{(n-q+1).bVp'y^{n-q}}{ap} = \frac{y^{n-q}dV}{dx}$; donc $\frac{(n-q+1)bp'dx}{ap} = \frac{dV}{V}$,

& en intégrant, L. V $= \text{S.} \frac{(n-q+1)bp'dx}{ap}$

$= \text{S.} \frac{(n-q+1)bp'dx}{ap}$. L. e (e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$)

$= \text{L.} e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}}$ en faisant $n-q+1=g$; donc en repassant des logarithmes aux nombres, $V = e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}}$. Or $e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}}$ dépend de l'intégration des différentielles à une seule variable; ainsi l'on peut supposer V connue.

Si l'on substitue cette valeur de V dans l'équation $Vy^{n-q}dy + \frac{by^g V p'dx}{ap} + \frac{cVp''dx}{ap} = 0$, les deux premiers termes deviendront une différentielle exacte, qu'on trouvera en intégrant le premier terme dans la supposition de y seul variable; mais l'intégrale de ce premier terme dans cette supposition, est $= \frac{Vy^{n-q+1}}{n-q+1} = \frac{Vy^g}{g}$; donc l'intégrale de toute l'équation sera $\frac{Vy^g}{g} + \text{S.} \frac{cVp''dx}{ap} = C$. En substituant la valeur de V, on aura $\frac{y^g}{g} \cdot e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}} + \text{S.} \left(\frac{cp''dx}{ap} \cdot e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}} \right) = C$, multipliant tout par g, divisant par $e^{\text{S.} \frac{gbp'dx}{ap}}$, transposant le second terme;

& prenant la racine g, il vient $y = \left(gC.e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}} - S.\left(\frac{gcp''dx}{ap}.e^{S.\frac{g'p'dx}{ap}}\right)e^{-S.\frac{gbp'dx}{ap}}\right)^{\frac{1}{g}}$;

les indéterminées ſeront donc toujours ſéparées & l'équation intégrée par cette méthode. Si g, ou $n-q+1$ étoit $=0$, la méthode paroîtroit ne rien donner; mais dans ce cas on auroit $n-q=-1$, & la propoſée ſe réduiroit à $\frac{dy}{y} + \frac{bp'dx}{ap} + \frac{cp''dx}{ap} = 0$, dont l'intégrale eſt $L.y + \frac{b}{a} S.\frac{p'dx}{p} + \frac{c}{a}.S.\frac{p''dx}{p} = C$.

129. LEMME. *Toutes les équations à deux variables & à trois termes, peuvent ſe réduire à cette forme* $dy = ax^m dx + by^q dx$. Puiſque ces équations ont deux termes où ſe trouve la différentielle d'une variable & un terme qui renferme la différentielle de l'autre variable, il eſt viſible qu'elles peuvent être repréſentées par l'équation $Az^e u^f du = Bu^g z^b dz + Cu^r z^t dz$. Diviſant tout par Az^e & par u^g on la réduit à celle-ci $u^{f-g} du = \frac{B}{A} z^{b-e} dz + \frac{C}{A} u^{r-g} z^{t-e} dz$, qu'on peut exprimer ainſi : $u^{a'} du + Ez^{b'} dz + Fu^{c'} z^{c''} dz$. Faiſant maintenant $u = y^{\frac{1}{a'+1}}$, l'on aura $u^{a'} du = \frac{dy}{a'+1}$. En ſubſtituant la valeur de u & de $u^{a'} du$, & multipliant par $a'+1$, l'on a $dy = (a'+1)Ez^{b'} dz$

$+(a'+1)Fy^{\frac{c'}{a'+1}}z^{c''}dz$, qu'on peut exprimer ainsi $dy = Gz^{b'}dz + Hy^{q}z^{c''}dz$. Supposant $x = z^{c''+1}$, ou $z = x^{\frac{1}{c''+1}}$, on en tirera $z^{c''}dz = \frac{dx}{c''+1}$, $dz = \frac{1}{c''+1}.x^{\frac{1}{c''+1}-1}dx$, & substituant ces valeurs de z & de dz, notre équation deviendra $dy = \frac{G}{c''+1} \times x^{\frac{b'-c''}{c''+1}}dx + \frac{H}{c''+1}.y^{q}dx$, qu'on peut exprimer par $dy = ax^{m}dx + by^{q}dx$.

130. PROBLÈME. *Une équation différentielle quelconque à deux variables & à trois termes étant donnée, séparer les indéterminées pour l'intégrer ensuite, ou l'intégrer en les séparant.* On pourra toujours réduire la proposée à la forme $dy = ax^{m}dx + by^{q}dx$, comme on vient de le démontrer, & on pourra résoudre cette équation comme il suit :

1°. Si $m = 0$. l'équation sera $dy = adx + by^{q}dx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{a+by^{q}} = dx$, équation séparée.

2°. Si $q = \frac{m}{m+1}$, on fera $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, ou $x^{m} = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1}z^{\frac{1}{m+1}-\frac{m}{m+1}}dz$, & en substituant les valeurs de x, de dx & de q, l'équation deviendra

dy

$dy = \frac{a\,dz}{m+1} + \frac{b}{m+1} \cdot y^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz$,

ou $(m+1).z^{\frac{m}{m+1}} dy = az^{\frac{m}{m+1}} dz + by^{\frac{m}{m+1}} dz$, qui eſt homogene, & dont par conſéquent on peut ſéparer les indéterminées.

3°. Si $q = 1$, on pourra mettre la propoſée ſous cette forme $-y^{\circ} dy + fx^{m} y^{\bullet} dx + ky^{1} dx = 0$, & la comparer avec la formule du problême précédent, ce qui donnera $a = -1$, $n = 0$, $p = x^{\circ} = 1$, $c = f$, $q = 1$, $b = k$, $p' = x^{\circ} = 1$, $p'' = x^{m}$, & en ſubſtituant ces valeurs dans l'intégrale qu'on a trouvée dans ce problême, l'on aura l'intégrale cherchée. A cauſe de $p = x^{\circ} = p' = 1$, l'on aura le facteur V, du problême précédent $= e^{\text{S.}\frac{gkdx}{a}} = e^{\frac{gkx}{a}}$.

4°. Enfin on peut toujours intégrer l'équation propoſée en ſéparant en même tems les indéterminées, quels que ſoient les expoſans m & q, on peut même trouver une infinité de ſuites qui exprimeront la valeur de y en x, en laiſſant l'expoſant m indéterminé & prenant un nombre quelconque 1, 2, 3, &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, &c. pour l'expoſant q; il eſt même facile d'avoir la valeur de y en laiſſant cet expoſant indéterminé. Puiſque $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \text{S.}\, by^{q} dx$ en ajoutant la conſtante C, on pourra trouver une infinité de ſuites qui donneront la valeur de y en x.

131. Soit l'équation qu'on appelle *du Comte Ricati* $dy = ax^m dx + by^2 dx$; en intégrant de part & d'autre, il vient $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^2 dx$. Suppoſant maintenant que la ſérie qui doit exprimer la valeur de y en x, ſoit $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + p$, on aura $y^2 = \frac{a^2x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{2ax^{m+1}p}{m+1} + p^2$, & la différentielle $by^2dx = \frac{ba^2x^{2m+2}dx}{(m+1)^2} + \frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + bp^2dx$, & en intégrant de part & d'autre, on trouvera $S.byydx = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + S.\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + S.bp^2dx$, & par conſéquent $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + S.\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1} + S.bppdx$. Si l'on ſuppoſe maintenant $p = \frac{ba^2x^{2m+3}}{(m+1)^2.(2m+3)} + p'$; en ſubſtituant cette valeur de p dans les différentielles $\frac{2bax^{m+1}pdx}{m+1}$, & $bppdx$, on trouvera en prenant les intégrales, d'autres termes de la ſuite cherchée. On ne doit pas oublier d'ajouter une conſtante.

On peut auſſi employer les rectangles de Newton, & il eſt aiſé de voir que la méthode dont nous venons de faire uſage fournit généralement la ſéparation auſſi bien que l'intégration.

132. Il y a une infinité de valeurs de m dans lesquelles l'équation de Ricati peut être séparée. Pour le faire voir représentons cette équation par la formule $dy + ay^2\,dx = bx^m\,dx$, a & b étant des quantités positives ou négatives *. 1°. Si $m = 0$, l'on aura $dy + ayy\,dx = b\,dx$, d'où l'on tire $\frac{dy}{b - ayy} = dx$, équation séparée. 2°. Supposons $y = \frac{c}{z}$, l'on aura $dy = -\frac{c\,dz}{zz}$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, & ôtant les fractions l'on trouvera $-c\,dz + acc\,dx = b\,x^m\,zz\,dx$, dans laquelle faisant $t = x^{m+1}$ pour avoir $x^m\,dx = \frac{dt}{m+1}$, & $dx = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}}\,dt}{m+1}$, il viendra en transposant & changeant ensuite tous les signes, $c\,dz + \frac{b\,zz\,dt}{m+1} = \frac{acc\,t^{\frac{-m}{m+1}}\,dt}{m+1}$, qui, en divisant par c & supposant $\frac{b}{m+1} = a'$ & $\frac{acc}{m+1} = b'$, devient $dz + a'\,zz\,dt = b'\,t^n\,dt$ (en faisant encore $\frac{-m}{m+1} = n$), équation qui a la même forme que la proposée & qui

* Si dans l'équation du problême le coefficient de $y^2\,dx$ est positif, rien n'empêche de le supposer maintenant négatif.

par conſéquent doit admettre la ſéparation dans les mêmes cas. De-là il ſuit que ſi la propoſée eſt ſéparable lorſque $m = n$, elle le ſera auſſi lorſque $m = \frac{-n}{n+1}$.

Suppoſons $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{xx}$, pour avoir $dy = -\frac{dx}{xx} - \frac{dz}{xx} + \frac{2z\,dx}{x^3}$. Si l'on ſubſtitue ces valeurs de dy & de y, l'on aura en multipliant par $-xx$, $dz - \frac{azz\,dx}{xx} = -bx^{m+2}\,dx$. Maintenant ſi l'on fait $x = \frac{1}{t}$, il viendra $dz + azz\,dt = bt^{-m-4}\,dt$, qui eſt ſemblable à la propoſée. Donc ſi la ſéparation réuſſit lorſque $m = n$, elle réuſſira auſſi lorſque l'on aura $m = -n - 4$. Ainſi du cas $m = n$ il s'en ſuit les deux cas ; ſçavoir, $m = \frac{-n}{n+1}$, & $m = -n - 4$, & comme d'ailleurs la ſéparation réuſſit lorſque $m = 0$, ou lorſque $m = n = 0$, en employant alternativement ces formules, l'on a $m = -4$; $m = -\frac{4}{3}$; $m = -\frac{8}{35}$, $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{12}{7}$ $m = -\frac{16}{7}$, &c. Ces cas ſont compris généralement dans la formule $m = \frac{-4P}{2P \pm 1}$, P étant un nombre entier poſitif quelconque ou o.

Mais pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, voici comment je raiſonne : Dans la formule de Ricati les indéterminées ſont ſépa-

rables lorſque $m = 0$, premier cas : & de-là il ſuit que la même choſe a lieu lorſque $m = \frac{-n}{n+1}$, ſecond cas. De plus la ſéparation réuſſit lorſque $m = n$; elle réuſſira donc auſſi lorſque $m = -n - 4$, troiſième cas. Si $m = 0$, l'on aura le cas de ſéparabilité. 1°. Si $m = 0 = n$. 2°. Si $n = 0$, l'on a alors $m = -4$: car par la troiſième formule $m = -n - 4$. 3°. Si $m = n = -4$, la formule $m = \frac{-n}{n+1}$ donne $\frac{+4}{-4+1} = \frac{-4}{3}$. Si maintenant $m = n = \frac{-4}{3}$, la formule $m = -n - 4$ donne $\frac{+4}{3} - 4 = \frac{+4-12}{3} = \frac{-8}{3}$. Si $m = \frac{-8}{3} = n$, la formule $m = \frac{-n}{n+1}$ fait voir que la ſéparation aura encore lieu ſi l'on diviſe $-\frac{8}{3}$ par $n + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = \frac{-8+3}{3} = -\frac{5}{3}$, c'eſt-à-dire, ſi lon fait $m = -\frac{8}{5}$, &c.

L'équation $dy + fyy z^t dz = gz^t dz$ ſe réduit facilement à la formule de Ricati de la maniere ſuivante : je change f en a, & je fais $z^t dz = dx$, ou $x \frac{z^{t+1}}{t+1}$, ou $z^{t+1} = (t+1)x$; alors $z = \left((t+1)x\right)^{\frac{1}{t+1}} = (h, x)^n$ en faiſant $t+1$

$= h$ & $\frac{1}{t+1} = n$; donc $dz = nhdx(hx)^{n-1}$, & $gz^p dz = gnh^n(h.x)^{pn+n-1} dx = bx^m dx$, en faisant $gnh^n = b$, & $pn + n - 1 = m$; donc en substituant, l'on aura $dy + avydx = bx^m dx$. Ainsi l'équation dont on vient de parler, admettra la séparation des indéterminées dans les mêmes cas que celle de Ricati.

Si l'on suppose que P soit un nombre infiniment grand, $m = \frac{-4P}{2P \pm 1}$ devient $= -2$, & l'équation de Ricati prend la forme $dy + ayy\,dx = \frac{b\,dx}{xx}$, & faisant $y = \frac{1}{z}$, l'on a $dy = -\frac{dz}{zz}$, $yy = \frac{1}{zz}$, & l'équation devient $-\frac{dz}{zz} + \frac{a\,dx}{zz} = \frac{b\,dx}{xx}$, équation homogene, & qui par conséquent admet la séparation des indéterminées.

Supposons $y = Ax^p + tx^q$, en substituant les valeurs de yy & de dy que donne cette supposition, dans l'équation de Ricati, elle deviendra $pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + aAx^{2p}dx + 2atAx^{p+q}dx + at^2x^{2q}dx = bx^m dx$. Supposons maintenant $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$, l'on aura $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$. Donc en effaçant les termes qui sont

égaux à 0, l'on aura la transformée $x^{-2}dt + a x^{-4} tt\, dx = b x^m dx$ (B).

Si l'on ſuppoſe $m = -4$, ayy, qui eſt ici repréſenté par att, & b ſeront multipliés par une même puiſſance de x; or alors les variables peuvent être ſéparées. En effet repréſentez -4 par m, l'équation deviendra $x^{-2}dt = bx^m dx - attx^m dx$, & ſuppoſant $m + 2 = n$, on aura en multipliant par x^2, $dt = b x^n dx - att\, x^n dx$, ou $\frac{dt}{b - att} = x^n dx$, équation où les indéterminées ſont ſéparées.

Soit de plus ſuppoſé $t = \frac{1}{z}$, l'équation B deviendra $dz + bx^{m+2} z z dx = a x^{-2} dx$, & ſuppoſant $z = A' x^{p'} + x^{q'} t'$, on aura, en opérant comme ci-devant, $p' A' x^{p'-1} dx + q' x^{q'-1} t' dx + x^{q'} dt' + b x^{2q'+m+2} t' t' dx + b A' A' x^{2p'+m+2} dx + 2b + A' x^{p'+q'+m+2} t' dx = a x^{-2} dx$. Suppoſant maintenant $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p' A' + b A' A' = 0$, $q' + 2b A' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$; l'on trouvera $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - b$, & la ſeconde transformée ſera après avoir multiplié par x^{2m+6}, $dt' + bx^{-m-4} t' t' dx = ax^{2m+4} dx$. Cette équation admettra la ſéparation ſi $-m - 4 = 2m + 4$, ou ſi $-8 = 3m$, ou ſi $m = \frac{-8}{3}$. Si on ſuppoſe de nouveau $t' = \frac{1}{z'}$, & $z' = A'' x^{p''} + x^{q''} t''$,

on trouvera que l'équation eſt ſéparable ſi $m = \frac{-12}{5}$, & l'on pourra en continuant les ſubſtitutions, trouver de nouvelles valeurs de m qui rendront l'équation ſéparable.

Dans la première ſubſtitution on a $y = Ax^p + x^q t$, & $p = -1$, $q = -2$; dans la ſeconde ſubſtitution, on a $p' = -m-3$, $q' = -2m-6$, & ainſi de ſuite, de ſorte que l'expoſant qui repréſente q eſt toujours double de l'expoſant qui repréſente p; donc l'expoſant p étant $-Pm-2P-1$, l'expſant q ſeroit $-2Pm-4P-2$. Donc en reprenant les ſubſtitutions précédentes & ſubſtituant les valeurs de t, z', t', &c. l'on aura $y = Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \frac{1}{A'x^{-m-3}+x^{-2m-6}} \cdot \frac{1}{A''x^{-2m-5}+x^{-4-10}}$. &c. $\times t$, t étant une variable qu'on détermine par la ſubſtitution dans les équations ſéparées, t eſt le multiplicateur du ſecond terme du dernier facteur. Si l'on ſuppoſe $m = \frac{-4P}{2P-1}$, il faudra continuer juſqu'au facteur dans lequel le premier terme en x aura pour expoſant $-Pm-2P-1$, le ſecond terme étant $x^{-2Pm-4P-2}t$. Si on ſubſtituoit $\frac{1}{z}$ au lieu de y, enſuite $Ax^p + x^q t$ pour z &c. on trouveroit les autres valeurs de m qui répondent à $\frac{-4P}{2P+1}$, & la valeur générale de y ſera $y = \frac{1}{Ax^{-m-1}+x^{-2m-2}} \cdot \left(\frac{1}{A'x^{-2m-3}+x^{-4m-6}}\right)$ &c.

en continuant de même jusqu'à ce que le premier terme en x dans le dénominateur soit $x^{-m(P+1)-2P-1}$, alors le second terme sera $x^{-(2m+2)(P+1)-2}t$.

133. REMARQUE. Il ne faut pas confondre la séparation des variables avec l'intégration; c'est-à dire, qu'on ne doit pas regarder une différentielle comme n'étant pas intégrable parce qu'on n'en peut pas séparer les indéterminées. Car dans les cas que l'équation de Ricati n'admet pas la séparation, on peut l'intégrer, ainsi qu'on l'a vu précédemment, & on auroit tort de l'abandonner comme on a accoutumé de le faire. On peut aussi intégrer uu grand nombre de différentielles sans avoir recours à la méthode de séparation.

Si l'on avoit, par exemple, l'équation $ydx = xdx - xdy$, cette équation n'est pas intégrable dans l'état où elle est; mais en transposant le terme xdy, elle devient $ydx + xdy = xdx$, dont l'intégrale est $xy = \frac{xx}{2} + C$. L'équation $ydx = xdx + xdy$, deviendra intégrable en transposant le terme xdy & divisant par x^2; car l'on aura $\frac{ydx - xdy}{xx} = \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale est $\frac{y}{x} = L.x$.

Soit l'équation $\frac{2xdy - 2ydx}{(x-y)^2} = dz$, j'ajoute au numérateur deux termes qui se détruisent $2xdx -$

$2xdx$, & j'ai $\frac{2xdx-2ydx-2xdx+2xdy}{(x-y)^2} = dz$. L'intégrale eſt donc $\frac{2x}{x-y} = z$.

Soit la différentielle $x^2dx^2+xydxdy = a^2dy^2$, en ajoutant de part & d'autre $\frac{y^2dy^2}{4}$, l'on aura $x^2dx^2+xydxdy+\frac{y^2dy^2}{4} = a^2dy^2+\frac{y^2dy^2}{4}$. Prenant la racine quarrée, il vient $xdx+\frac{ydy}{2} = \frac{dy}{2}\sqrt{(4aa+y^2)}$. L'intégrale du premier membre eſt facile à trouver, & celle du ſecond ſe trouve par les ſéries.

Si l'on avoit l'équation $x^2dy+2xydy+y^2dy = b^2dx$, en ajoutant b^2dy de part & d'autre, l'on auroit $x^2dy+2xydy+y^2dy+b^2dy = b^2(dx+dy)$; donc en diviſant, $dy = \frac{b^2(dx+dy)}{(x+y)^2+b^2} = \frac{b^2dz}{z^2+b^2}$ (en faiſant $x+y=z$). L'intégrale du ſecond membre de cette équation eſt un arc de cercle dont le rayon $= b$ & la tangente $= z = x+y$.

DE LA DEMI-SÉPARATION DES INDÉTERMINÉES ET DE QUELQUES AUTRES MÉTHODES DE CALCUL INTÉGRAL.

134. Nous ne connoiſſons point de méthode générale pour ſéparer les indéterminées dans une équation donnée, lors même que cette ſéparation eſt poſſible, ſoit en la rendant homogene, ou ſans la rendre homogene. Pour la rendre homogene, on peut eſſayer d'égaler une des variables où même une fonction de deux variables à une fonction d'une nouvelle variable avec des expoſans indéterminés qu'on détermine dans la ſuite par la condition que la transformée doit être homogene.

La méthode de la demi-ſéparation eſt due au Comte Jacques Ricati. Dans cette méthode, on diſtribue l'équation de manière qu'il en réſulte une eſpèce de demi-ſéparation, en rejettant dans les multiplicateurs ou diviſeurs communs, les quantités qui empêchent la ſéparation; on égale enſuite l'intégrale des termes ſéparés à une nouvelle variable; & par le moyen de cette ſubſtitution on chaſſe une des indéterminées de l'équation propoſée. Après l'opération il arrive ſouvent que les indéterminées ſont ſéparées dans l'équation réſultante.

EXEMPLE I. Soit la différentielle $\frac{2y\,dy + x\,dy + y\,dx}{a + x + y} = dz$, z étant une fonction de y ſans x. Le numérateur étant intégrable, je regarde le dénominateur comme un diviſeur commun de tous les termes du numérateur, & je ſuppoſe $2y\,dy + x\,dy + y\,dx = a\,du$; donc $y^2 + xy = au$, & $x = \frac{au - yy}{y}$. Donc notre équation deviendra $\frac{a\,du}{a + \frac{au - yy}{y} + y} = dz$, ou $\frac{y\,du}{y + u} = dz$; d'où l'on tire $y\,du - u\,dz = y\,dz$, ou en diviſant par y & prépa-

rant l'équation, $u\left(\frac{du}{u}-\frac{dz}{y}\right)=dz$. Faiſons $\frac{dz}{y}=\frac{dt}{t}$; t ſera une fonction de y, & l'équation deviendra $u.\left(\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}\right)=dz$. Suppoſons enfin $\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}=\frac{dp}{p}$, l'on aura $L.u-L.t=L.p$, ou $L.\frac{u}{t}=L.p$, ou $\frac{u}{t}=p$, ou $u=pt$. Mais $u.\left(\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}\right)=dz$, & $\frac{du}{u}-\frac{dt}{t}=\frac{dp}{p}$; donc en ſubſtituant, $pt.\frac{dp}{p}=dz$. ou $t\,dp=dz$, ou $dp=\frac{dz}{t}$, mais t & z ſont des fonctions de y; donc l'équation eſt ſéparée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $-A\,dy+aB\,x\,x\,dy=x\,dx$, A & B étant des fonctions quelconques de y ſans x, je la diſpoſe ainſi $-A\,dy=x^2.\left(\frac{dx}{x}-a\,B\,dy\right)$. Faites $a\,B\,dy=\frac{dz}{z}$, afin que z ſoit une fonction de y, il viendra $-A\,dy=x\,x.\left(\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z}\right)$. Faiſant $\frac{x}{z}=\frac{t}{b}$, & éliminant x, il vient $-A\,dy=\frac{t^2z^2dt}{bbt}$, ou $-\frac{b^2A\,dy}{z^2}=t\,dt$, équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées, puiſque A & z ſont des fonctions de y.

EXEMPLE III. Soit la formule $-\frac{a^3dx}{x}+b\,y\,dx=a\,y\,dy$. Je la prépare de cette maniere $y.\,(b\,dx-a\,dy)=\frac{a^3dx}{x}$ (A). Je ſuppoſe maintenant $b\,dx-a\,dy=a\,dz$; donc $bx-ay=az$, & $y=\frac{bx-az}{a}$. Subſtituant

cette valeur de y & celle de $b\,dx - a\,dy$ dans l'équation A, l'on trouve $b\,x\,dz - a\,z\,dz = \frac{a^3\,dx}{x}$, ou $b\,x\,dz = \frac{a^3\,dx}{x} + a\,z\,dz$. Je fais $z\,dz = \frac{a\,a\,dt}{t}$ pour avoir $b\,x\,dz = a\,a.\left(\frac{a\,dx}{x} + \frac{a\,dt}{t}\right)$ (B). Faisant enfin $\frac{a\,dx}{x} + \frac{a\,dt}{t} = \frac{a\,du}{u}$, il vient en intégrant, $a(l\,x + l\,t) = a\,l\,u$, ou a L. $x\,t = a$ L. u, ou L. $x\,t =$ L. u, ou $x\,t = u$, & $x = \frac{u}{t}$. Subſtituant $\frac{u}{t}$ & $\frac{a\,du}{u}$ à la place de leurs valeurs, l'équation B devient $\frac{b\,u\,dz}{t} = \frac{a^3\,du}{u}$, ou $\frac{b\,dz}{t} = \frac{a^3\,du}{u\,u}$, équation dont les indéterminées ſont ſéparées, puiſque t eſt une fonction de z.

EXEMPLE IV. Soit maintenant l'équation $\frac{2\,x^2\,dx + x\,y\,dy + y^2\,dx}{x^4 + x^2\,y^2 + a^4} = \frac{x\,dx + y\,dy}{a\,a\sqrt{(x^2 + y^2)}}$. Le ſecond membre eſt intégrable, & en faiſant $x^2 + y^2 = z\,z$, il ſe change en $\frac{dz}{a\,a}$; de plus cette ſuppoſition donne $y\,dy = z\,dz - x\,dx$. Donc en ſubſtituant dans le premier membre de l'équation les valeurs de y^2 & de $y\,dy$, & changeant le ſecond membre en $\frac{dz}{a\,a}$, l'on aura, toute réduction faite, $\frac{x\,z\,dz + z^2\,dx}{z^2\,x^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$. Pour préparer cette équation on l'écrira ainſi $\frac{z}{z^2\,x^2 + a^4}.(x\,dz + z\,dx) = \frac{dz}{a^2}$. Je fais $x\,dz + z\,dx = a\,dt$, & en intégrant, $x\,z =$

$= t$; donc $x = \frac{at}{z}$; donc en éliminant x, l'équation préparée devient $\frac{z\,dt}{at^2+a^3} = \frac{dz}{a^2}$, ou $\frac{a\,dt}{t^2+a^2} = \frac{dz}{z}$, dont l'intégrale est $\frac{b}{a} = \text{L.}\,z$, b étant un arc de cercle dont la tangente $= t$ & le rayon $= a$.

135. Parlons maintenant d'un autre artifice dont se sert Jean Bernouilli dans les actes de Léipsic 1697, en faisant une des variables de l'équation égale au produit de deux autres variables indéterminées, (produit qu'on divise par une constante a pour conserver l'homogénéité) : ainsi, par exemple, on suppose $y = \frac{p.q}{a}$, p & q étant deux nouvelles variables. En éliminant y par cette substitution, on détruit quelques termes de l'équation qui en résulte, de manière que l'on puisse séparer les indéterminées dans les termes qui restent.

EXEMPLE I. Soit l'équation $aydy = y^2dx + x^2dx$, faites $y = \frac{pq}{a}$, ayant fait la substitution, on aura une nouvelle équation $aq^2pdp + ap^2qdq = p^2q^2dx + a^2x^2dx$. En supposant égaux les termes aq^2pdp, p^2q^2dx, l'on aura $\frac{adp}{p} = dx$, & $a\,\text{L.}\,p = x$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $ap^2qdq = a^2x^2dx$, ou $p^2qdq = ax^2dx$, ou $qdq = \frac{ax^2dx}{p^2}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées, puisque p est une fonction de x.

EXEMPLE II. Soit l'équation $dy = \frac{yxdy}{xx-aa} - \frac{y^3dx}{x^3}$. En faisait $y = \frac{pq}{a}$, on aura la nouvelle équation $q\,dp$

$+p\,dq = \frac{pqx\,dx}{xx-aa} - \frac{p^3q^3\,dx}{a^2x^3}$. Je fais $q\,dp = \frac{pqx\,dx}{xx-aa}$, d'où je tire $\frac{dp}{p} = \frac{x\,dx}{xx-aa}$, & en intégrant, $L.p = L.\sqrt{(xx-aa)}$ ou $p = \sqrt{(xx-aa)}$. Effaçant les termes qu'on a supposés égaux, il vient $p\,dq = \frac{-p^3q^3\,dx}{a^2x^3}$, ou $-\frac{a^3\,dq}{q^3} = \frac{ap^2\,dx}{x^3} = \frac{ax^2dx-a^3\,dx}{x^3} = \frac{a\,dx}{x} - \frac{a^3\,dx}{x^3}$, équation dans laquelle les variables sont séparées.

Mais cette méthode ne réussit que dans les équations dans lesquelles on peut mettre dy dans un seul terme, y dans l'autre terme & y^m dans le troisième terme, m étant un exposant quelconque. On sent bien que ce qu'on dit de y doit s'entendre d'une autre variable pour laquelle on pourroit faire une semblable disposition.

136. Les substitutions sont utiles pour ramener plusieurs équations différentielles à une autre équation dont on sait trouver l'intégrale. Supposons, par exemple, qu'on veuille ramener une équation à l'équation générale $py^n\,dy + y^{n+1}p'\,dx + cy^tp''\,dx = 0$, dans laquelle p, p' & p'' sont des fonctions de y sans x * & qu'on peut toujours intégrer (128). Si dans cette formule on substitue différentes fonctions de x prises à volonté pour p, p', p'' & qu'on fasse $z = xy$, ou en général $z^s = x^ry^t$, t, r, s étant des exposans arbitraires qu'on détermine ensuite comme on veut, il est évident qu'on trouvera par ce moyen autant d'équations différentielles qu'on voudra, toutes réductibles à la forme générale dont on vient de parler.

* On a supprimé les coefficiens a, b, c. Cela ne change rien à la méthode, d'autant plus qu'on peut supposer que ces coefficiens entrent dans p, p', p''.

137. THÉOREME. *Si dans l'équation* $A(ay^n dy + x^n dx) + B(xdy - ydx)\ b = 0$, *a & b ſont des conſtantes*, A & B *des fonctions homogenes de* x *& de* y, *on pourra toujours ramener cette équation à la formule générale dont on vient de parler en faiſant* $x = yz$. Si l'on diviſe l'équation propoſée par A, elle devient $(ay^n dy + x^n dx) + b(xdy - ydx).\frac{B}{A}$. Si l'on ſubſtitue dans cette dernière équation yz au lieu de x & $ydz + zdy$ au lieu de dx, il viendra en réduiſant, $(a + z^{n+1}) y^n dy + y^{n+1} z^n dz - \frac{bB}{A} y^2 dz = 0$; mais B eſt une fonction homogene que je ſuppoſe de la dimenſion u dans chaque terme de B, des variables x & y; donc en ſubſtituant yz au lieu de x, l'on aura $B = y^u Z$, Z étant une fonction de z. Suppoſons de même que A eſt une fonction homogene de x & y de la dimenſion u', on aura $A = y^{u'} Z'$, Z' étant une fonction de z; donc $\frac{B}{A} = \frac{y^u Z}{y^{u'} Z'} = y^v Z''$, en faiſant $u - u' = V$ & $\frac{Z}{Z'} = Z''$; donc la propoſée deviendra $(a + z^{n+1}) y^n dy + y^{n+1} z^n dz - by^{v+2} Z'' dz = 0$, qui a la forme requiſe, puiſque $a + z^{n+1}$, z^n, $-bZ''$ ſont des fonctions de z.

Soit l'équation $(fx^{-1} y^2 + gy).(x^2 dx + ay^2 dy) + (hx^2 y^2 + iyx^3).(xdy - ydx)\ b = 0$. En la comparant avec celle du théorême, on trouve $n = 2$, $A = fx^{-1} y^2 + gy$, $B = hx^2 y^2 + iyx^3$; & en faiſant $x = yz$, on aura $A = y\frac{f + gz}{z} = y^u Z'$; donc $u = 1$ & $Z' = \frac{f + gz}{z}$. On trouvera auſſi $B = y^u Z = y^4 (hz^2 + iz^3)$; donc $u = 4$ & $Z = hz^2 + iz^3$. Donc $V = u - u' = 3$ & $Z'' = \frac{hz^3 + iz^4}{f + gz}$; & l'équation tranſformée

formée sera $(a+z^3)\,y^2\,dy + y^3\,z^2\,dz + by^5 \times \left(\frac{hz^3+1z^4}{f+gz}\right)dz = 0$.

138. THÉORÈME. *Si dans l'équation* $ax^n\,dx + by^n\,dy + (x\,dy - y\,dx)\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = 0$, *les quantités* A & B *sont des fonctions homogenes de* x & *de* y, *de même ou de différentes dimensions entr'elles, ou dont la différence des dimensions est* k, k *étant* $= 0$ *ou un nombre quelconque,* C & D *étant aussi des fonctions homogenes telles que la différence des dimensions de* C *sur* D *soit* $= n-1$, *on pourra toujours réduire cette équation à la forme du* N°. (128), *en faisant* $x = yz$. L'on aura $dx = y\,dz + z\,dy$. Substituant ces valeurs de dx & de x dans l'équation proposée, elle deviendra $az^{n+1}y^n\,dy + ay^{n+1}z^n\,dz + by^n\,dy - y^2\,dz\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = 0$. Or A, B, C, D étant des fonctions homogenes de x & de y, telles qu'on l'a supposé, l'on aura $\frac{A}{B} = y^k P$, P étant une fonction de z, & $\frac{C}{D} = y^{k-1} P'$, P′ étant encore une fonction de z; donc $-y^2\,dz\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) = -y^{k+2} P\,dz - y^{n+1} P'\,dz$, & l'équation transformée sera $(az^{n+1} + b)\,y^n\,dy + (kz^n - P')\,y^{n+1}\,dz - y^{k+2} P\,dz = 0$, qui a la forme requise.

EXEMPLE. Soit l'équation $ax^7\,dx + by^7\,dy + (x\,dy - y\,dx).(x^2 + y^2 + \frac{x^8y + y^8x}{x^3+y^3}) = 0$. En la comparant avec celle du théorême, l'on trouve $n = 7$, $\frac{A}{B} = x^2 + y^2$, $\frac{C}{D} = \frac{x^8y + y^8x}{x^3+y^3}$, $k = 2$ & $9 - 3 = 6 = n - 1$, selon les conditions requises. En substi-

tuant zy au lieu de x, réduisant & arrangeant les termes, l'on aura $(az^8+b)y^7dy+y^8\left(az^7-\left(\frac{z^8+z}{z^3+1}\right)\right)dz-y^4(z^2+1)dz=0$, équation qui a la forme qu'on demande, & qu'on rendra plus simple en la divisant par y^4.

139. PROBLÈME. *Étant donnée l'équation à quatre termes* $ax^m dx+by^p x^n dx+cy^s dx-dy=0$, *la réduire à trois termes, pour l'intégrer ensuite par le problème du N°.* 130. En faisant $y=x^b z$, & substituant au lieu de y & de dy les valeurs que donne cette supposition, la proposée devient $ax^m dx+bz^p x^{bp+n}dx+cz^s x^{bs}dx-hzx^{h-1}dx-x^b dz=0$, équation de cinq termes qu'on peut réduire à trois, en supposant que deux termes se détruisent; mais la supposition de deux termes égalés à 0, ne doit pas conduire à une absurdité. Supposons $bz^p x^{bp+n}dx-hzx^{h-1}dx=0$, l'on aura $p=1$, $hp+n=h+n=h-1$, ou $n=-1$, & $b=h$ *, ce qui réduit l'équation proposée à celle-ci $ax^m dx+byx^{-1}dx+cy^s dx-dy=0$, qu'on ramene à l'équation de trois termes $ax^m dx+cz^s x^{bs}dx-x^b dz=0$ ou (en divisant par x^b & transposant) à l'équa-

* Ainsi si dans la proposée l'on a $p=1$, & $n=-1$, on pourra facilement la réduire à trois termes en faisant $y=x^b z$.

tion $dz = ax^{m-b}\,dx + cz x^{bs-b}\,dx$, en faisant $y = x^b z$.

Si dans cette équation $m = bs$, l'on a, en substituant cette valeur & divisant par $a + cz$, $x^{m-b}\,dx = \frac{dz}{a+cz^s}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées ; si on a $s = 2$, la dernière équation aura la forme de celle de Ricati.

Avant de passer à d'autres méthodes nous allons résoudre un problême qui peut être utile dans certains cas.

140. PROBLÊME. *Soit l'équation différentielle* $dy + ypdx + y^2 p'dx + p''dx = 0$, p, p', p'' *désignant des fonctions de* x *sans* y, *étant données deux valeurs de* y *en* x, *qui satisfassent à l'équation proposée, c'est-à-dire, la rendent égale à* 0, *trouver le facteur qui doit la rendre intégrale.* Soient m & n les fonctions de x qui, substituées au lieu de y, rendent la proposée $= 0$; en substituant successivement m & dm, n & dn au lieu de y & de dy, l'on aura $dm + mpdx + m^2 p'dx + p''dx = 0$, & $dn + npdx + n^2 p'dx + p''dx = 0$. Soit $\frac{y-m}{y-n} = z$, ou $y = \frac{m-nz}{1-z}$; si l'on substitue les valeurs de y & de dy que donne cette supposition dans l'équation proposée, qu'on multiplie par $(1-z)^2$, & que dans le résultat on substitue les valeurs de dm, dn que donnent les deux équations précédentes, on aura en réduisant & préparant l'équation, $p'z\,dx(m-n)^2 + (m-n)\,dz = 0$, ou en divisant par $(m-n)z$,

& transposant, $\frac{dz}{z} = -p'(m-n)\,dx$; & en intégrant, $L.z = -S.p'(m-n)dx = -S.(m-n)dx\,L.e$, ($e$ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$), ou $z = e^{-S.p'(m-n)dx}$. Ainsi l'intégrale de l'équation $p'z\,dx\,(m-n)^2 + (m-n)dz = 0$, ou $p'dx.(m-n) + \frac{dz}{z} = 0$, est $e^{S.p'(m-n)dx} + \frac{y-m}{y-n} = C$, en substituant la valeur de z.

Si l'on fait attention maintenant qu'après les substitutions l'équation proposée a été multipliée par $(1-z)^2$, & divisée par $(m-n).z$, il est évident qu'en multipliant tout d'un coup par $\frac{(1-z)^2}{(m-n)z} = \frac{m-n}{(y-n)(y-m)}$, à cause de $z = \frac{y-n}{y-n}$, l'équation proposée sera intégrable. On peut voir par la solution de ce problême qu'ayant des intégrales particulieres des équations de la forme proposée, on peut en trouver l'intégrale générale. Si $p = 0$, l'on aura l'équation de Ricati qui n'est qu'un cas particulier de notre équation, au reste nous traiterons plus au long des intégrales particulieres des équations différentielles.

141. PROBLÊME. *Intégrer l'équation* $x = yP + M$, *dans laquelle* P *&* M *sont des fonctions quelconques de* z *ou de* $\frac{dx}{dy}$. En différentiant l'équation proposée, l'on a $dx = P\,dy + y\,dP + dM = z\,dy$; puisque l'équation $z = \frac{dx}{dy}$,

donne $dx = z\,dy$. Donc $P\,dy - z\,dy + y\,dP + dM = 0$, & $dy + \frac{y\,dP}{P-z} + \frac{dM}{P-z} = 0$. Puiſque P & M ſont des fonctions de z, l'on pourra ſuppoſer $\frac{dP}{P-z} = V\,dz$, $\frac{dM}{P-z} = V'dz$, V & V' étant des fonctions de z. Ainſi l'équation ſe réduira à cette forme $y^0\,dy + y'V\,dz + y^0\,V'\,dz = 0$, qui a les conditions requiſes (128); & ſuppoſant L. $e = 1$, & C une conſtante quelconque, on trouvera aiſément par le N°. cité, l'intégrale $y\,e^{S.V\,dz} + S.(V'dz.e^{S.V\,dz}) = C$; donc $y = \frac{C - S.(V'dz.e^{S.V\,dz})}{e^{S.V\,dz}}$. L'on aura donc la valeur de y en z, & ſubſtituant la valeur de dy priſe de cette équation dans l'équation $dx = z\,dy$, l'on aura $x = S.z\,dy$, & $S.z\,dy$ ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une ſeule variable.

142. Il arrive aſſez ſouvent que par la ſubſtitution de z au lieu de $\frac{dy}{dx}$, ou de $z\,dx$ au lieu de dy, on parvient à des équations finies & même algébriques entre x & y ſans employer les méthodes ordinaires d'intégration.

Si l'on avoit l'équation $y\,dx - x\,dy = a\sqrt[3]{(dx^3 + dy^3)}$, en ſuppoſant $dy = z\,dx$ & faiſant diſparoître dx par la diviſion, on trouve $y - zx = a\sqrt[3]{(1 + z^3)}$ (B). Différentiant cette équation, ſubſtituant la valeur de dy, tranſpoſant, réduiſant & diviſant par dz, il vient x

$= \frac{-a\,z^3}{\sqrt[3]{((1+z^3))^2}}$. Substituant cette valeur dans l'équation B, on en tirera $y = \frac{a}{\sqrt[3]{((1+z^3))^2}}$ (D); donc $x^3 + y^3 = \frac{a^3(1-z^3)}{(1+z^3)^2} = -a^3 + \frac{2a^3}{1+z^3}$; donc $\frac{1}{1+z^3} = \frac{a^3+x^3+y^3}{2a^3}$. En substituant cette valeur de $\frac{1}{1+z^3}$ dans l'équation D, on trouvera, après les opérations ordinaires, $4a^3y^3 = (a^3+x^3+y^3)^2$.

143. THÉORÈME. *Si on multiplie ou si on divise une différentielle quelconque, par une fonction de son intégrale, le résultat sera une différentielle, dont l'intégrale ne dépendra que de l'intégration des différentielles à une seule variable.* Soit dp une différentielle quelconque, dont l'intégrale $= p$ *, & p' une fonction de p, il est évident que le produit $p'dp$ & le quotient $\frac{dp}{p'}$ seront des différentielles à une seule variable p; donc les intégrales S. $p'dp$, S. $\frac{dp}{p'}$ se trouveront la première par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée perpendiculaire $= p'$ & l'abscise $= p$, &

*Quelque nombre d'inconnues que puisse renfermer p, on peut considérer cette quantité comme une seule inconnue.

la seconde par la quadrature d'une courbe dont l'ordonnée $= \frac{1}{p'}$ & l'abscisse $= p$.

144. THÉORÈME. *L'équation* $p' dp - d(p' y z) = -y.d.(p' z)$ *est intégrable lorsque l'intégrale du premier membre* S. $p' dp - p' y z$ *est égale à une fonction du produit de* y *par une fonction de* $p' z$. Soit $m(p' z)$ cette fonction de $p' z$, $n(y m(p' z))$ une fonction du produit $y.m(p' z)$. En considérant $y.m(p' z)$ comme une seule inconnue x, & la quantité S. $p' dp - p' y z$ comme une autre inconnue t, on aura $t = nx$; donc $x = \frac{1}{n} t = qt$ (q étant une fonction de t comme il suit de la nature des équations) $= q$ (S. $p' dp - p' y z$; donc on aura q (S. $p' dp - p' y z$) $= y.m.(p' z)$. Donc en divisant les deux membres de l'équation proposée par des quantités égales, on aura $\frac{p' dp - d(p' y z)}{q(S. p' dp - p' y z} = \frac{-y.d(p' z)}{y.m(p' z)} = \frac{-d(p' z)}{m(p' z)}$, équation dont chaque membre est une différentielle divisée par une fonction de son intégrale; c'est pourquoi cette équation sera intégrable, & par conséquent la proposée le sera aussi.

COROLLAIRE. L'équation $p dx - d.(p y z) = -y.d.(p z)$, p étant une fonction de x, est intégrable lorsque S. $p dx = a y p z + b y p^b z^b$, a, b, h étant constantes : car en ajoutant $-y p z$ de part & d'autre, l'on parviendra aisément à l'équation S. $p dx - y p z = y(ap z - p z +$

$b\,(pz)^b\,) = y.\,m\,(pz)$. On aura donc $\frac{pdx - d.(pyz)}{S.pdx - pyz} = \frac{-y.d.(pz)}{y.m.(pz)} = \frac{-d.(pz)}{m.pz}$; & en intégrant, L. $(S.pdx - pyz) = S.\frac{-d(pz)}{m(pz)} + C$.

Suppoſons que les deux équations du corollaire ſoient $x^{\frac{1}{2}}dx - d.(yx^{\frac{1}{2}}z) = -y.d.(yx^{\frac{1}{2}}z)$, & $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = yx^{\frac{1}{2}}z + 2yx^{\frac{1}{2}}z = 3yx^{\frac{1}{2}}z$, ce qui donne $a = 1 = h$, $b = 2$, $p = x^{\frac{1}{2}}$. L'intégrale du corollaire ſera L. $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z\right)$ $= S.\frac{-d.(x^{\frac{1}{2}}z)}{2x^{\frac{1}{2}}z} + C = -\frac{1}{2}$ L. $x^{\frac{1}{2}}z +$ L. f (en faiſant $C =$ L. f, ce qui eſt permis) $=$ L. $f\,(x^{\frac{1}{2}}z)^{-\frac{1}{2}} =$ L. $\frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}}$; donc en repaſſant des logarithmes aux nombres, $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - yx^{\frac{1}{2}}z = \frac{f}{(x^{\frac{1}{2}}z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{f}{x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}}$; donc $\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}z^{\frac{1}{2}} - yx^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{2}} = f$. Si on ſubſtitue dans cette équation la valeur de z priſe de l'équation $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = 3yx^{\frac{1}{2}}z$, on aura $\frac{2}{3}x^{\frac{7}{4}}\sqrt{\frac{2x}{9y}} - yx^{\frac{1}{4}}\times$

$\sqrt{\frac{8x^3}{7^2 9y^2}} = f$, équation par le moyen de laquelle on peut trouver la valeur de y en x, ou celle de x en y.

145. PROBLÊME. *Trouver les intégrales des deux équations* $dx + (ax + by)\,dt = 0$, $dy + (hx + fy)\,dt = 0$. Multipliant la seconde équation par un facteur constant & indéterminé p, & l'ajoutant ensuite à la première, il vient $dx + p\,dy + \big((a + hp)x + (b + fp)y\big)\,dt = 0$. Il faut faire ensorte que dans cette équation le multiplicateur de dt devienne un multiple de $x + py$ intégrale des autres termes de l'équation, afin qu'ayant supposé $x + py = u$, & m étant une constante indéterminée, l'équation prenne la forme $du + m\,u\,dt = 0$, ou $\frac{du}{u} + m\,dt = 0$, équation dans laquelle les variables sont séparées. On aura donc par cette supposition $ax + hpx + by + fpy = mx + mpy$, & en comparant terme à terme, les deux membres de cette équation, $ax + hpx = mx$, & $by + fpy = mpy$, d'où l'on tire $m = a + hp$, $m = \frac{b + fp}{p}$; donc $a + hp = \frac{b + fp}{p}$, ou $ap + hpp = b + fp$. Si l'on considere p comme une inconnue, l'on trouvera en résolvant cette équation du second dégré, deux valeurs de p. Nous représenterons l'une de ces valeurs par p & l'autre par p'. Mais l'équation $x + py = u$, donne $du = dx + p\,dy$, & de plus nous avons $m = a + hp$; donc l'équation $du + m\,u\,dt = 0$,

devient $du + (a + hp)\,u\,dt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -(a + hp)\,dt$; donc en intégrant & ajoutant une constante $C' = L.g$, on aura $L.u = L.g - t(a + hp) = L.g - t.(a + hp).L.e$ (en faisant $L.e = 1$) $= L.\frac{g}{e^{t(a+hp)}}$; donc $u = ge^{-t(a+hp)}$. En employant les deux valeurs de p, on aura $x + py = u$, & $x + p'y = u'$, $u = ge^{-t(a+hp)}$ (A), & $u' = g'e^{-t[a+hp']}$ (B). La première équation donne $x = u - py$. Si l'on en retranche la seconde, on trouvera facilement $y = \frac{u - u'}{p - p'}$; donc $x = u - py = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$. Substituant dans ces valeurs de y & de x, les valeurs de u & de u' que donnent les équations A & B, on déterminera les constantes g & g' par les valeurs que x & y doivent avoir lorsque t est égale à 0, ou à une quantité donnée. Si l'équation qui doit donner les valeurs de p & qu'on trouvera facilement devoir être $hpp + ap - fp - b = 0$, ne donne pas deux valeurs de p, ce qui arrivera si $h = 0$, ou $b = 0$, & dans le cas où les deux valeurs de p seront égales, voici comment on pourra s'y prendre. 1°. Si $b = 0$, une des valeurs de p est 0, & l'autre $= \frac{f - a}{h}$. Ainsi dans les formules précédentes on fera $p' = 0$. 2°. Si $h = 0$, la seconde équation proposée sera $dy + fydt = 0$, ou $\frac{dy}{y} = -f\,dt$, d'où l'on tire $y = ne^{-ft}$, n étant une constante; donc y sera

une fonction de t que nous désignerons par q, & substituant cette valeur de y dans la première équation, l'on a $dx + axdt + bqdt = 0$, équation qui se réduit à la formule du N°. 128 & qu'on integre facilement. Si les deux valeurs de p sont égales, on aura toujours l'équation $x + py = u$, ou $x = u - py = ge^{-t[a+bp]} - py$. Substituant cette valeur de x dans la seconde équation proposée, on trouvera $dy + (f - hp)ydt + hge^{-t[a+bp]}dt = 0$, équation qui se réduit encore à la formule ci-dessus (128). Enfin si p & p' étoient imaginaires, le problême se résoudroit de la même manière. Car les quantités imaginaires se réduisent toujours à la forme $M + N\sqrt{-1}$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, & si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires disparoîtroient.

Si les équations étoient $dx + (ax + by)Tdt + Ndt = 0$, $dy + (hx + fy)Tdt + N'dt = 0$, T, N, N' étant des fonctions de t, ou 0, on multiplieroit la seconde par la constante p, & ajoutant le produit à la première, on auroit $dx + pdy + \big((a + hp)x + (b + fp)y\big)Tdt + (N + pN')dt = 0$. Faisant ensuite $x + py = u$, & $(a + hp)x + (b + fp)y = mx + mpy$, on trouvera comme ci-devant, $m = a + hp = \frac{b + fp}{p}$; d'où l'on tirera l'équation $hpp + ap - fp - b = 0$; qui donnera deux valeurs de p, qu'on représentera par p & p', & l'on aura $du + (a + hp)uTdt + (N + N'p)dt = 0$, équation qu'on integre comme la précédente par le N°. (128); & l'on trouvera les va-

leurs de y & de x, dans leſquelles on mettra pour u & u' leurs valeurs trouvées par le N°. (128).

146. REMARQUE. Si les deux dernières équations contenoient la premiere le terme $a'dy$; la ſeconde le terme ndx, on multiplieroit de même la ſeconde par p pour l'ajouter à la premiere, dans la ſomme l'on ſuppoſeroit $(1+np)x+(a'+p)y = u(a+hp)x+(b+fp)y = m(1+np)x+m(a+p)y$, & l'on auroit l'équation $du+muTdt+(N+pN')dt=0$, & l'on feroit le reſte comme dans le cas prédédent, en ſe ſervant de la valeur de $u=(1+np).x+(a'+p).y$, au lieu de $u=x+ay$. Si les quantités dx & dy étoient multipliées par des conſtantes, la ſolution ne ſeroit pas plus difficile & d'ailleurs on peut les faire diſparoître en diviſant chaque équation par le coefficient du premier terme.

147. PROBLÊME. Intégrer les trois équations $dx+(ax+by+cz)dt=0$; $dy+(hx+ky+lz)dt=0$; $dz+(mx+ny+rz)dt=0$. Multipliant la ſeconde par une conſtante A, la troiſième par la conſtante B, A & B ſont des indéterminées, & prenant enſuite la ſomme des trois équations, l'on aura $dx+Ady+Bdz+\big((a+Ah+Bm)x+(b+Ak+Bn)y+(c+Al+Br)\big)dt=0$. En ſuppoſant enſuite $x+Ay+Bz=u$, & faiſant le multiplicateur de dt égal à Mu, M étant une conſtante, l'on aura $du+Mudt=0$, ou $\frac{du}{u}=-Mdt$, ou en intégrant, $L.u=-Mt+L.g.=L.g-Mt.L.e$, ou $u=ge^{-Mt}$. De plus on aura par ſuppoſition, $Mu=Mx+$

$MAy + MBz = (a + Ah + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Br)z$. Egalant les termes homologues de cette dernière équation, l'on aura $M = a + Ah + Bm$, $MA = b + Ak + Bn$, $MB = c + Al + Br$; d'où l'on tire les deux équations $a + Ah + Bm = \frac{b + Ak + Bn}{A} = \frac{c + Al + Br}{B}$. Prenant la valeur de B dans la première de ces deux équations & la substituant dans la seconde, on aura, après les réductions ordinaires, une équation du troisième dégré qui donnera trois valeurs de A.

Cela posé en désignant par p, p', p'' ces trois valeurs de A, par q, q', q'' les trois valeurs correspondantes de B, par f, f', f'' les valeurs correspondantes de M, au lieu de l'équation $u = ge^{-Mt}$, on aura ces trois équations $u = ge^{-ft}$, $u' = g'e^{-f't}$, $u'' = g''e^{-f''t}$, & au lieu de l'équation $x + Ay + Bz = u$, on aura les trois équations $x + py + qz = ge^{-ft}$, $x + p'y + q'z = g'e^{-f't}$, $x + p''y + q''z = ge^{-f''t}$; de ces trois équations l'on tirera les valeurs de x, y, z, & l'on déterminera g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorsque t est $= 0$, ou est égal à une constante donnée.

Si l'équation en A n'a pas trois racines inégales, comme on l'a supposé, on pourra toujours pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le problême, au cas ci dessus (146). Car soit p, q, f, les valeurs respectives de A, B, M, l'équation $x + Ay + Bz = u = ge^{-Mt}$, devendra $x + py + qz = ge^{-ft}$. Faisant évanouir par cette dernière équation la variable z,

on réduira les trois équations données à deux équations de la forme de celles du N°. (146). Mais si l'équation en A n'avoit aucune racine, parce que les coefficiens qui affectent les différentes puissances de A seroient tous égaux à 0, dans ce cas si le terme tout connu de l'équation s'évanouit aussi, c'est une marque qu'on peut donner à A telle valeur qu'on voudra. Si ce terme ne s'évanouit pas, on augmentera ou on diminuera à volonté le coefficient a ou b, &c. d'une quantité infiniment petite pour rétablir un des termes de l'équation, & l'on trouvera du moins par la méthode du quarré algébrique, une valeur de A qui résoudra le problême.

En général quelque soit le nombre des équations $dx + ady + cdz$ &c. $+ (fx + kz +$ &c.$)dt + N dt = 0$, $dx + a'dy + c'dz$ &c $+ (f'x + hy + k'z$ &c.$)dt + N'dt = 0$, &c. qui contiennent autant de variables que l'on voudra, pourvu qu'elles soient de cette forme, ou qu'elles y soient réductibles & que l'on ait autant d'équations que de variables, en multipliant chacune de ces équations par des constantes indéterminées, prenant ensuite leur somme, en supposant $= du$ la somme des termes du résultat qui contiennent les différentielles dx, dy, dz, &c. & faisant le multiplicateur de dt * $= mu$, u étant l'intégrale du premier terme, elles se réduiront à une équation $du + mu\,dt + (T + T' +$ &c.$)dt$

* Il s'agit de dt pris dans le second terme de l'équation en prenant pour un seul terme la somme de ceux qui contiennent les différentielles dx, dy, &c. & pour un autre terme tous ceux qui contiennent les variables x, y, &c. & qui sont multipliés par dt.

$= 0$, T, T', &c. étant des fonctions de t, ou 0. Or cette équation eſt intégrable par la méthode ci-deſſus (128).

REMARQUE. Si on avoit un nombre n d'équations renfermant le nombre $n + 1$ de variables, en multipliant toutes ces équations, excepté la première, reſpectivement par des facteurs m, m', m'', &c. qu'on ſuppoſeroit être des fonctions indéterminées de ces variables, on ajouteroit les produits à la première équation, & multipliant la ſomme par un facteur p qu'on ſuppoſeroit être une fonction des mêmes variables, on ſuppoſeroit que le réſultat eſt une différentielle complette.

Si l'on avoit les deux équations $a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$, $a'\,dx + b'\,dy + e'\,dz = 0$, a, a', b, b', c, c' étant des fonctions de x, y, z, ces fonctions peuvent auſſi renfermer des conſtantes; multipliant la ſeconde par m, ajoutant le produit à la première, & multipliant enſuite par p, on trouvera $p(a + a'm)\,dx + p(b + b'm)\,dy + p(c + c'm)\,dz = 0$. Pour que cette équation ſoit complette, il faut (par le N°. 89) qu'on ait les trois équations

$$\frac{d\left(p.(a + a'm)\right)}{dy} = \frac{d\left(p.(b + b'm)\right)}{dx};$$

$$\frac{d\left(p.(a + a'm)\right)}{dz} = \frac{d\,(p.c + t'm)}{dx};$$

$$\frac{d(p.b + b'm)}{dz} = \frac{d\left(p.(c + c'm)\right)}{dy}, \text{ ou}$$

$$\frac{dp}{dy}(a + a'm) + p.\frac{d(a + a'm)}{dy} = \frac{dp}{dx} \times$$

$(b + b'm) + p.\frac{d(b+b'm)}{dx}$; $\frac{dp}{dz}(a + a'm)$ $+ p\frac{d(a+a'm)}{dz} = \frac{dp}{dx}(c + c'm) +$ $p\frac{d(c+c'm)}{dx}$; $\frac{dp}{dz}(b + b'm) + p.\frac{d(b+b'm)}{dz}$ $= \frac{dp}{dy}(c + c'm) + p.\frac{d(c+c'm)}{dy}$. Si en regardant $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dz}$ comme deux inconnues, on ſubſtitue dans la première équation leurs valeurs priſes dans les deux dernières, on trouvera, toute réduction faite, $(c + c'm).\left(\frac{d(a+a'm)}{dy} - \frac{d(b+b'm)}{dx}\right) + (a + a'm)\left(\frac{d(b+b'm)}{dz} - \frac{d(c+c'm)}{dy}\right) + (b + b'm)\left(\frac{d(c+c'm)}{dx} - \frac{d(a+a'm)}{dz}\right) = 0$, équation indépendante de p.

On cherchera donc pour m une fonction de x, y & z la plus générale qu'il ſoit poſſible, & qui puiſſe ſatisfaire à cette équation, & ſuppoſant qu'on ait trouvé m, on cherchera pour p une fonction des variables x, y, z qui ſatisfaſſe à deux quelconques des trois équations ci-deſſus qu'on a trouvées d'abord.

DES INTÉGRALES PARTICULIERES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

148. *L'intégrale particuliere d'une équation différentielle* eſt un rapport des variables qui ſatisfait à l'équation, & qui ne contient aucune nouvelle conſtante, au lieu que l'intégrale générale contient une conſtante indéterminée qui ne ſe trouve pas dans l'équation différentielle s'il s'agit d'une équation du premier ordre. L'intégrale finie & complette d'une équation de l'ordre m doit contenir un nombre m de conſtantes arbitraires Voyez le (N°. 77). Il eſt ſouvent facile de trouver une intégrale particulière comme en devinant. Par exemple, ſi l'on avoit l'équation $aady + yydx = aadx + xydx$, il ſeroit facile de voir qu'on ſatisfait à cette équation en faiſant $x = y$. Ce rapport qui ne renferme ni la conſtante a qui ſe trouve dans la différentielle, ni une conſtante indéterminée qui ne s'y trouve pas, ne peut être qu'une intégrale particulière. Souvent l'intégrale particulière peut faire connoître l'intégrale générale. Si l'on fait $y = x + z$, cette ſuppoſition, en faiſant les opérations ordinaires, changera notre équation en celle-ci $aadz + xzdx + zzdx = 0$, celle-ci, en ſuppoſant $z = \frac{aa}{u}$, devient $du - \frac{xudx}{aa} = dx$, qui, étant multipliée par $e^{\frac{-xx}{2aa}}$ (on ſuppoſe L. $e = 1$) & enſuite intégrée, donne $u.e^{\frac{-xx}{2aa}} = S.e^{\frac{-xx}{2aa}}dx$;

ou $u = e^{\frac{xx}{2aa}} S. e^{\frac{-xx}{2aa}} dx + C$, en ajoutant une conſtante. Si l'on ſuppoſe $C = \infty$, le premier terme du ſecond membre de l'équation diſparoit, & l'on a $u = \infty$ & $z = \frac{aa}{u} = 0$; donc alors $y = x$: ce qui fait voir que l'intégrale particulière doit être contenue dans l'intégrale générale. Si l'on avoit l'équation $a^3 dy + y^3 dx = a^3 dx + x^3 dx$, la relation $x = y$ ſatisferoit à l'équation; mais en ſuppoſant $y = x + z$, on parviendra à une équation qui ne paroîtra pas plus facile à réſoudre que la propoſée.

Dans la ſolution d'un problême on n'a beſoin que d'une intégrale particulière; ainſi ſi l'on peut trouver cette intégrale, on réſoudra le problême, quoiqu'on ne puiſſe pas avoir l'intégrale générale de l'équation différentielle qui exprime la nature du problême.

149. Quoiqu'une certaine relation des variables ſatisfaſſe à l'équation propoſée, cette relation n'eſt pas toujours une intégrale particulière. Si l'on avoit, par exemple, l'équation $dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$, on ſatisferoit à cette équation en ſuppoſant $xx + yy = aa$; car alors en ôtant la fraction, le premier membre devient $= 0$, il en eſt de même du ſecond, puiſque la différentielle de $(xx + yy)$ doit être $= 0$, différentielle de aa. Or l'intégrale générale de cette équation eſt $y = C - \sqrt{(aa - xx - yy)}$ qui ne contient pas l'équation $xx + yy = aa$, quelque valeur qu'on donne à C, x & y reſtant indéterminés. Au reſte

les intégrales trouvées par les méthodes ordinaires, ne ſont jamais dans ce cas ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on trouvoit par les méthodes ordinaires, une intégrale $y = ax$ ſans ajouter de conſtante C, cette intégrale ſeroit une intégrale particuliere de l'équation propoſée.

150. PROBLÊME. *Le rapport* $y = x$ *ſatisfaiſant à l'équation* $ady - adx = dx\sqrt{(yy - xx)}$, *déterminer ſi ce rapport eſt une intégrale particuliere de l'équation propoſée.* Qu'on ſuppoſe $y = x + p$, p étant une quantité infiniment petite, l'on aura, en négligeant la ſeconde puiſſance de p, $\sqrt{(yy - xx)} = \sqrt{(2xp)}$. Mais l'équation $y = x + p$ donne $dy = dx + dp$; donc $ady - adx = adx + adp - adx = adp$, & notre équation devient $adp = dx\sqrt{2xp}$, en ſubſtituant la valeur de $\sqrt{(yy - xx)}$. Ainſi $\frac{adp}{\sqrt{p}}$ ou $\frac{adp}{p^{\frac{1}{2}}} = dx\sqrt{2x}$, & en intégrant, $2ap^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + C$. Maintenant je remarque que p eſt une quantité infiniment petite par l'hypothèſe, & que de quelle maniere qu'on détermine C, x reſtant indéterminé, l'on ne peut ſuppoſer p infiniment petit, mais que p pourra être auſſi grand que l'on voudra ; donc le rapport $y = x$ ne peut être une intégrale particuliere de l'équation propoſée, & cela arrivera toutes les fois que dans la transformée l'on aura dp diviſé par une puiſſance m de p, ou par p^m, ſi l'expoſant m eſt plus petit que l'unité. Au contraire ſi l'on a $\frac{dp}{p^m} = Bdx$, B étant une fonction

de x ou une conſtante, l'on aura $\frac{1}{(m-1).p^{m-1}} = C - S.Bdx = C - D$, en faiſant $S.Bdx = D$; d'où l'on tire $(m-1)p^{m-1} = \frac{1}{C-D}$, & en ſuppoſant $C = \infty$, l'on aura p infiniment petit lorſque m ſera > 1, comme l'hypotheſe l'exige.

Si $m = 1$, & qu'on ait l'équation $\frac{dp}{p^m} = B\,dx$, alors en faiſant $S.\,B\,dx = D$, on trouvera $L.\,p = L.\,C + L.D = L.CD$, ou $p = CD$; & en ſuppoſant C infiniment petit, l'on aura p infiniment petit, comme cela doit être par ſuppoſition.

151. PROBLÊME. *Si une certaine relation entre deux variables ſatisfait à une équation différentielle, déterminer ſi cette relation eſt une intégrale particuliere ou non.* Soit l'équation $A\,dx = B\,dy$, A & B étant des fonctions quelconques de x & de y, à laquelle ſatisfaſſe le rapport $y = t$, t étant une fonction de x, de maniere qu'en ſubſtituant t au lieu de y, l'on ait l'équation $A\,dx - B\,dy = 0$, ou $A\,dx = B\,dy$, ou $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$. Je ſuppoſe $y = t + p$, l'on aura $dy = dt + dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$. Si l'on faiſoit $p = 0$, l'on auroit $dp = 0$, & l'équation ſeroit $\frac{dt}{dx} = \frac{A}{B}$. Conſidérons p comme une quantité infiniment petite, & négligeant les termes qui ſont affectés des puiſſances de p au-deſſus de la plus baſſe, ſuppoſons que par la

ſubſtitution $y = t + p$, l'équation devienne $\frac{A}{B} = \frac{dt}{dx} + D p^m$; l'équation $\frac{dt}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{A}{B}$ devant être la même que la précédente, l'on aura $\frac{dp}{dx} = D p^m$, ou $\frac{dp}{p^m} = D\,dx$. Maintenant il eſt viſible, par ce qu'on vient de dire (150), que $y = t$ ſera une intégrale particuliere, ou qu'on pourra regarder p comme $= 0$, lorſque m ſera $= 1$ ou plus grand que 1. Si au contraire $m < 1$, le rapport $y = t$, ne ſera pas une intégrale particuliere.

152. PROBLÊME. *Le rapport $y = x$ ſatisfaiſant à l'équation $dx(1 - y^m)^n = dy(1 - x^m)^n$; on demande ſi ce rapport eſt une intégrale particuliere ou non.* Suppoſant $y = x + p$, l'on aura par le binome de Newton, $y^m = x^m + mx^{m-1}p$, en négligeant les autres termes qui contiennent des puiſſances de p plus élevées que la premiere, & $(1 - y^m)^n = (1 - x^m - mx^{m-1}p)^n = (1 - x^m)^n - mnx^{m-1}p(1 - x^m)^{n-1}$; donc l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^m)^n}{(1 - x^m)^n}$ devient $\frac{dx}{dx} + \frac{dp}{dx}$ ou $1 + \frac{dp}{dx} = 1 - \frac{mnx^{m-1}p}{1 - x^m}$, ou $\frac{dp}{p} = -\frac{mnx^{m-1}dx}{1 - x^m}$; & parce que l'expoſant de p eſt ici une puiſſance entiere, l'équation $y = x$ eſt certainement une intégrale particuliere de la propoſée.

153. THÉORÊME. *Si l'équation différentielle* $A\,dx + B\,dy = 0$, *étant multipliée par une fonction* m *de* x *&* y *devient intégrable, le rapport* $m = 0$ *ſera une intégrale particuliere, à moins que dans ce cas* A *ou* B *ne deviennent infinis.* Suppoſons que u ſoit un facteur de m, il faut démontrer que l'équation $u = 0$, eſt une intégrale particuliere de l'équation propoſée. u étant une certaine fonction de x & de y, on peut, par l'équation $u = 0$, trouver pour la valeur de y, une fonction de u qui donne l'équation $Q\,dx + R\,du = 0$ entre x & u; & en faiſant le multiplicateur $m = nu$, l'on aura l'équation $nQ\,u\,dx + n\,R\,u\,du = 0$, qui ſera intégrable. Maintenant ſi ni Q, ni R ne ſont diviſibles par $u = 0$, ni A, ni B ne peut devenir infini, & l'intégrale ſera diviſible par u. Car ſoit qu'on integre le terme $nQu\,dx$, en regardant u comme conſtant, ou le terme $nRu\,du$ en conſidérant x comme conſtant, l'intégrale aura toujours un facteur u, en omettant la conſtante dans l'intégrale. Ainſi l'intégrale complette aura cette forme $Pu = C$, & ſi l'on fait $C = 0$, $u = 0$ ſera une intégrale particuliere, excepté dans les cas que Q ou R ſeroient diviſibles par u. Il faut dire la même choſe de chaque facteur de m, pourvu que A ou B ne deviennent pas infinis par la ſuppoſition de $m = 0$.

REMARQUE. La condition dont on vient de parler eſt abſolument néceſſaire : car ſi l'on a l'équation $\frac{a\,dx}{y-x} + dy - dx = 0$, qui étant multipliée par $u = y - x$, devient intégrable, l'on aura $y = x + u$, & notre équation ſera

$\frac{a\,dx}{u} + du = 0$, ou $a\,dx + u\,dy = 0$, & comme la partie $a\,dx$ n'eſt pas multipliée par u, l'intégrale $ax + \frac{1}{2}uu$, en négligeant la conſtante, ne ſera pas exactement diviſible par u. Si la partie qui contient dx étoit multipliée par u, quoique la partie qui contient du ne le fût pas, cependant l'intégrale ſeroit diviſible par u comme on peut le voir dans la différentielle $udx + xdu$, dont l'intégrale, en négligeant la conſtante, eſt xu. Ce qui fait voir que ſi la différentielle $A\,u\,dx + B\,du$ eſt exacte, pourvu que B ne ſoit pas diviſible par u, l'intégrale, en omettant la conſtante, ſera diviſible par u.

154. THÉORÊME. *Si l'équation différentielle* $A\,dx + B\,dy = 0$ *devient intégrable en la diviſant par une fonction* m *de* x *&* y, *l'équation* $m = 0$ *ſera une intégrale particuliere, à moins qu'en faiſant* $m = 0$, A *ou* B *ne s'évanouiſſent.* Soit $m = nu$, u étant un facteur de m, il faut démontrer que l'équation $u = 0$, (& l'on doit dire la même choſe de chacun des autres facteurs de m), eſt une intégrale particuliere. u étant une fonction de x & de y, on pourra, par cette conſidération, chaſſer y pour avoir l'équation $Q\,dx + R\,du = 0$; & en diviſant celle-ci par nu, on la rendra complette. Il faut donc chercher l'intégrale de $\frac{Q\,dx}{nu} + \frac{R\,du}{nu}$, nous ſuppoſons que ni Q, ni R ne ſont diviſibles par u. Si l'on prend l'intégrale dans le premier terme, en conſidérant u comme conſtant, l'on a $\frac{1}{u}S.\frac{Q\,dx}{n}$, en négligeant la conſ-

tante. Et ſi l'on prend l'intégrale du ſecond terme, à cauſe que R n'a point de facteur u, comme nous le ſuppoſons, cette intégrale ſera une fraction qui contiendra u au dénominateur; donc cette intégrale ſera infinie lorſqu'on fera $u = 0$. Si donc l'intégrale eſt ſuppoſée $= V$, elle ſera telle qu'elle deviendra infinie, lorſqu'on ſuppoſera $u = 0$, & l'intégrale complette étant $V = C$, on ſatisfera à l'équation $V = C$, en ſuppoſant $C = \infty$, & $u = 0$; d'où l'on peut conclure que chaque facteur u de m, donnera une intégrale particuliere $u = 0$, à moins qu'en faiſant $u = 0$, les quantités A & B, ou Q & R ne s'évanouiſſent.

DE LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

155. J'entends ici par *conſtruction géométrique d'une équation différentielle*, la méthode de trouver une courbe dont le rapport des coordonnées ſoit exprimé par l'équation différentielle propoſée.

Soit l'équation différentielle $A\,dx + B\,dy = 0$, (A & B étant des fonctions de y & de x), on aura $A\,dx = -B\,dy$, ou $\frac{A}{B}\,dx = -dy$. Si l'on multiplie cette équation par $-a$, (a étant une quantité poſitive priſe à volonté, par exemple, un pied), & qu'on faſſe $\frac{-Aa}{B} = p$, on pourra donner à l'équation précédente la forme $pdx = ady$; & p étant une fonction de y & de x, l'on aura en

intégrant, S. $p\,dx = ay$. Donc $y = \frac{S.p\,dx}{a}$ ou $ay = S.pdx$ eſt l'équation de la courbe cherchée. Si l'on ſuppoſe que $p = \frac{3y^{o}xx}{a}$, l'on aura S. $p\,dx = \frac{x^3}{a}$, & l'équation de la courbe ſera $ay = \frac{x^3}{a}$, ou $a^2y = x^3$ qui déſigne une courbe parabolique. Il faut faire enſorte que les membres de l'équation $pdx = a\,dy$, ſoient de même dimenſion, ce qu'on peut toujours obtenir en diviſant ou en multipliant le premier membre par une conſtante b qu'on ſuppoſera égale à l'unité.

Soit $p = \frac{a^2y^2x}{ay + x^2}$. Je ſuppoſe qu'on ait décrit une infinité de courbes a C, fC' (Fig. 16.) de manière que dans la première aC, l'on prenne $y = g$ quantité conſtante & que ſur chaque abſciſſe AB, on éleve l'ordonnée perpendiculaire BC; de ſorte que l'on ait BC $= \frac{a^2y^2x}{ay + x^2} = \frac{a^2g^2x}{ag + x^2}$. On décrira la ſeconde courbe fC' de la même manière, & en ſuppoſant $y = g'$; ſuppoſons qu'on ait ainſi décrit une infinité de courbes en donnant ſucceſſivement à y des valeurs depuis o juſqu'à l'infini, de manière que la ligne y ſoit conſtante pour chaque courbe, mais différente dans toutes. Cela poſé, $p\,dx$ repréſentera l'élément de l'aire de la courbe aC, lorſqu'on ſuppoſera dans p la quantité $y = g$; mais $p\,dx$ repréſentera l'élément de l'aire de la courbe fC' ſi l'on ſuppoſe $y = g'$, &c. Suppoſons que A ſoit l'origine des abſciſſes & qu'en faiſant $y = g$, l'on prenne l'aire AaBC =

$ay = ag$, on prolongera l'ordonnée B C juſqu'à ce que B M ſoit $= g = y$; ſi l'on ſuppoſe maintenant $y = g'$, on prendra l'aire $AfC'B'$, & l'on fera le prolongement $B'N = g'$, c'eſt-à-dire, on fera B' N égale à la valeur de y dans la courbe fC', & ainſi de même pour toutes les courbes que nous ſuppoſons décrites par cette loi ſur l'axe A B. Faiſant paſſer une courbe MN par tous les points M, N ainſi déterminés, cette courbe ſera la courbe cherchée, & cela arrivera de même, quelque fonction de y & de x que ſoit p. En effet l'on aura $S.pdx = ay$ (ou en général $S.pdx = z$, z étant une fonction de y, nous ſuppoſons qu'on n'ajoute point de conſtante, mais ſi l'on veut en ajouter une, il n'y a qu'à la renfermer dans z). Donc ſi on fait $y = g$, l'on aura $y = BM = \frac{S.pdx}{a}$, & ſi l'on ſuppoſe $y = g'$, l'on aura $B'N = y = \frac{S.pdx}{a}$. Donc la nature de la courbe M N eſt exprimée par l'équation $S.pdx = ay$, ou $pdx = ady$. Mais on doit remettre dans p la variable y au lieu de la conſtante g, qui eſt le parametre de la courbe aC.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

156. Un principe très-ſimple mais très-fécond pour trouver les regles générales du calcul intégral eſt de choiſir une différentielle générale d'un ordre quelconque, de la différentier en ſuppoſant la différence d'une des variables conſtante ou en faiſant tout varier, & d'en déduire enſuite les

regles pour réduire cette différentielle à celle d'un ordre inférieur qu'on avoit choiſie.

157. Soit $p\,dx$ la différentielle générale du premier ordre à une ſeule variable x, dans laquelle on ſuppoſe que p eſt une fonction quelconque de x. En différentiant la propoſée, l'on aura $pddx + p'\,dx^2$ pour ſa différentielle du ſecond ordre, p' étant encore une fonction de x * & $p' = \frac{dp}{dx}$; donc une différentielle du ſecond ordre à une ſeule variable x avec dx auſſi variable, ſera intégrable ſi on peut la réduire à la forme $p\,ddx + p'\,dx^2$, & ſi en même tems l'on a $p' = \frac{dp}{dx}$, autrement elle ne ſera pas intégrable; ſi elle donne ces conditions, ſon intégrale ſera $p\,dx$.

Soit la différentielle $(ax^2 + bbx + cx^{-3})ddx + (2ax + b^2 - 3cx^{-4})\,dx^2$ en la comparant avec la formule générale, on trouve $p = ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, $p' = 2ax + b^2 - 3cx^{-4}$, & $\frac{dp}{dx} = \frac{2ax\,dx + b^2\,dx - 3cx^{-4}\,dx}{dx} = 2ax + b^2 - 3cx^{-4} = p'$; donc la différentielle propoſée eſt intégrable & ſon intégrale eſt $p\,dx = (ax^2 + b^2x + cx^{-3})\,dx$. Si on vouloit l'intégrale de $p\,dx$, on trouveroit $\frac{ax^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2} - \frac{cx^{-2}}{2} + C$.

* Si l'on avoit $p' = a^2 + b^2 = x^0(a^2 + b^2)$, p' ſeroit une fonction de x, mais de dimenſion nulle.

158. Soit $p\,ddx + p'\,dx^2$ la différentielle générale du second ordre à une seule variable x réductible ou non réductible au premier ordre. Si on la différencie en faisant varier x, dx & ddx, on trouvera $pd^3x + ddx\,dp + 2p'\,dx\,ddx + dx^2\,dp' = pd^3x + p''\,dxddx + 2p'\,dxddx + p'''\,dx^3$ (A), en supposant $dp = p''\,dx$, & $dp' = p'''\,dx$, ou $p'' = \frac{dp}{dx}$ & $p''' = \frac{dp'}{dx}$. Ainsi étant proposée une équation du troisième ordre à une seule variable x, on examinera si elle est réductible à la forme A, & en même tems si elle donne les équations $p'' = \frac{dp}{dx}$, $p''' = \frac{dp'}{dx}$; si elle n'a pas ces conditions, elle ne fera pas intégrable, si elle les donne, son intégrale sera $p\,ddx + p'\,dx^2$.

Soit la différentielle du troisième ordre $ax^3\,dddx + 3ax^2\,dx\,ddx + 2bx^2\,dx\,ddx + 2bx\,dx^3$. En la comparant avec la formule générale, on trouve $p = ax^3$, $p'' = 3ax^2$, $p' = bx^2$, $p''' = 2bx$. On trouve aussi les égalités $p'' = \frac{dp}{dx}$, $p''' = \frac{dp'}{dx}$; car $\frac{dp}{dx} = \frac{3ax^2\,dx}{dx} = 3ax^2 = p''$, & $\frac{dp'}{dx} = \frac{2bx\,dx}{dx} = 2bx = p'''$; donc l'équation proposée a les conditions requises, & son intégrale est $p\,ddx + p'\,dx^2 = ax^3\,ddx + bx^2\,dx^2$. On pourroit trouver quelque difficulté dans la comparaison de la différentielle

proposée avec la formule générale : car cette formule étant exprimée ainsi $p\,d^3x + (p'' + 2p')\,dx\,ddx + p'''\,dx^3$, & la différentielle proposée de cette manière $ax^3\,d^3x + (3ax^2 + 2bx^2)\,dx\,ddx + 2bx\,dx^3$, on trouveroit d'abord $p = ax^3$ & $p''' = 2bx$. Mais on pourroit être embarrassé à trouver les valeurs de p'' & de p' par l'équation $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$. Cette difficulté disparoît en faisant attention aux équations $p'' = \frac{dp}{dx}$, & $p''' = \frac{dp'}{dx}$ qui doivent avoir lieu lorsque la différentielle est intégrable ou réductible au second ordre : car puisqu'on a déja trouvé $p = ax^3$, & que l'on doit avoir $p'' = \frac{dp}{dx}$, l'on aura $p'' = 3ax^2$; & par conséquent $2p' = 2bx^2$ & $p' = bx^2$. On peut appliquer ces réflexions à tous les cas.

Si l'on suppose que la seconde différence ddx soit constante, d^3x sera $= 0$, & la formule générale deviendra $(p'' + 2p')\,dx\,ddx + p'''\,dx^3$, & l'on aura les équations $p''' = \frac{dp'}{dx}$; & $p'' = \frac{dp}{dx}$. Dans cette même supposition la différentielle précédente sera $(3ax^2 + 2bx^2)\,dx\,ddx + 2bx\,dx^3$. En la comparant avec la formule générale, on a $p''' = 2bx$, & $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$, & par l'équation $p''' = \frac{dp'}{dx}$, ou $p'''\,dx = dp'$, on a $2bx\,dx = dp'$; donc en intégrant,

$bx^2 = p'$; donc $2p' = 2bx^2$; donc par l'équation $p'' + 2p' = 3ax^2 + 2bx^2$, l'on a $p'' = 3ax^2$. Mais $p'' = \frac{dp}{dx}$, ou $p''dx = dp$; donc $3ax^2 dx = dp$, & $ax^3 = p$; ainsi l'intégrale de notre équation sera $pddx + p'dx^2 = ax^3 ddx + bx^2 dx^2$. Il est facile d'appliquer cette méthode à une différentielle du quatrième ordre ou d'un ordre plus élevé, pourvu qu'il n'y ait qu'une seule variable.

159. On a souvent besoin sur-tout dans les questions *de maximis & minimis*, de supposer une différentielle égale à 0. Lorsque cette différentielle est du premier ordre & ne contient qu'une seule variable x, on peut la représenter par pdx; si l'on fait $pdx = 0$, on aura en divisant par dx, l'équation $p = 0$, qui fera connoître x. Mais si l'équation différentielle contient des différences des ordres supérieurs, on cherchera si la différentielle qu'on a égalée à 0, est intégrable par la méthode qu'on vient d'expliquer; & on l'intégrera si cela est possible; mais si la méthode ne réussit pas, on la multipliera par un facteur m qu'on supposera être une fonction de x, & l'on tâchera de déterminer m par les conditions requises pour que le produit soit une différentielle exacte.

160. Toutes les équations du second ordre à une seule variable x, sont intégrables par cette méthode: car en multipliant par m l'équation générale du second ordre à une seule variable $pddx + p'dx^2 = 0$, on a $mpddx + mp'dx^2 = 0$. Pour que le premier membre de cette équation soit

une intégrale exacte, selon ce qu'on a dit ci-dessus (157), on doit avoir $mp'dx = d(mp) = mdp + pdm$, & l'intégrale cherchée sera $mpdx = 0$. De l'équation $mp'dx = mdp + pdm$, on tire $\frac{dm}{m} = \frac{p'dx - dp}{p} = \frac{p'dx}{p} - \frac{dp}{p}$, & en intégrant, $L.m = S.\frac{p'dx}{p} - L.p$, ou $L.m + L.p = S.\frac{p'}{p}dx$, $L.mp = S.\frac{p'}{p}dx$ $L.e$ (en supposant $L.e = 1$); donc $pm = e^{S.\frac{p'dx}{p}}$, & $m = \frac{e^{S.\frac{p'dx}{p}}}{p}$; & partant l'intégrale cherchée sera $e^{S.\frac{p'dx}{p}}dx = 0$, & en divisant par dx, $e^{S.\frac{p'dx}{p}} = 0$, si on intégre l'équation $e^{S.\frac{p'dx}{p}}dx = 0$, on aura $S.e^{S.\frac{p'dx}{p}}dx = C$ constante.

Mais il y a une infinité de différentielles à une seule variable & des ordres supérieurs, qu'on ne peut réduire à un ordre inférieur, même en les multipliant par un facteur m.

La différentielle générale du second ordre à une seule variable x, peut facilement se réduire à la forme d'une différentielle du premier ordre à deux variables x & y: car en supposant $ddx = dy$, & par conséquent $dx = y$, & substituant, on changera la différentielle $pddx + p'dx^2$ en $pdy + p'ydx$. On pourra chercher l'intégrale

de la transformée par les méthodes que nous avons données pour ces sortes d'équations, & en remettant ensuite dx pour y dans cette intégrale, elle deviendra une différentielle du premier ordre à une seule variable x.

La différentielle du troisième ordre à une seule variable x, qu'on peut représenter par la formule $p\,d^3x + p'\,dx\,ddx + p''\,dx^3$ se réduit à une différentielle du second ordre à deux variables x & z en faisant $d^3x = dd\,z$, $ddx = d\,z$ & $dx = z$, ce qui change la proposée en $p\,dd\,z + p'\,dx\,d\,z + p''\,z\,dx^2$. Si dans celle-ci on fait $dd\,z = du$, & $d\,z = u$, elle deviendra $p\,du + p'\,z\,d\,z + p''\,z^2\,dx$, en faisant attention que l'on a $dx = z$. On pourra faire les mêmes raisonnemens pour une différentielle à une seule variable & d'un ordre quelconque qu'on pourra toujours réduire aux ordres inférieurs & même au premier ordre.

161. A & B étant supposés des fonctions de x & de y, la différentielle du premier ordre à deux variables peut être représentée par la formule $A\,dx + B\,dy$. En différentiant cette formule, l'on aura $A\,ddx + d\,A.\,dx + B\,ddy + d\,B \times dy$, & en supposant que A', A'', B', B'' soient encore des fonctions de x & de y, & que $d\,A = A'\,dx + A''\,dy$ & $d\,B = B'\,dy + B''\,dx$, on aura la différentielle générale du second ordre, & à deux variables $A\,ddx + A'\,dx^2 + (A'' + B')\,dx\,dy + B\,ddy + B'\,dy^2$, qui sera réductible au premier ordre lorsqu'on aura les deux équations de condition $d\,A = A'\,dx + A''\,dy$, & $d\,B = B'\,dy + B''\,dx$, & l'on trouvera d'abord les deux termes

A *d d x*

$A\,ddx$, $B\,ddy$ de la formule générale, en comparant ceux de la différentielle proposée où se trouvent les différentielles ddx, ddy; & l'intégrale de la proposée sera $Adx + Bdy$. On s'en assurera en différentiant cette intégrale, & l'on doit faire la même chose quand il s'agit des différentielles à une seule variable : car si l'on ne retrouvoit pas la différentielle proposée, la proposée ne seroit pas intégrable, du moins dans l'état où elle est.

Soit l'équation $ax^2 y\,ddx + 2\,ayx\,dx^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2)\,dx\,dy + b^2x^3y^2\,ddy + 2bb\,xy\,dy^2$, en comparant, l'on a $A\,ddx = ax^2y\,ddx$; donc $A = ax^2y$. L'on trouve de même $B = b^2x^3y^2$; & l'intégrale cherchée $A\,dx + Bdy$ est $= ax^2y\,dx + b^2x^3y^2dy$. En effet en différentiant cette intégrale, on retrouve la différentielle proposée.

Si dans la différentielle $A\,dx + B\,dy$ on avoit supposé dx constant, dans ce cas l'on auroit $ddx = 0$, & la différentielle générale du second ordre en effaçant le terme $A\,ddx$, deviendroit $A'\,dx^2 + (A'' + B'')\,dxdy + B\,ddy + B'\,dy^2$. Cette formule sera réductible à une différentielle du premier ordre $A\,dx + B\,dx$, lorsqu'on aura les deux équations de condition $dA = A'\,dx + A''\,dy$, & $dB = B'\,dy + B''\,dx$. En comparant la dernière formule générale avec une différentielle proposée dans laquelle dx seroit constant, on trouvera facilement la valeur de B, & par la comparaison du terme $A'\,dx^2$ avec son correspondant, on aura la valeur de A'. On in-

tégrera la différentielle $A' dx$, en regardant x ſeul comme variable, l'intégrale ſera $= A$, & en ſubſtituant les valeurs de A & de B dans la différentielle $A dx + B dy$, on aura l'intégrale cherchée, pourvu qu'en différentiant de nouveau, l'on retrouve la différentielle propoſée.

Soit la différentielle $2 ayx dx^2 + (ax^2 + 3 bx^2) dx dy + bx^3 dd y$. En la comparant avec la dernière formule générale, on trouve $B' = 0$, c'eſt-à-dire, on trouve que le terme correſpondant au terme $B' dy^2$ manque; on trouve auſſi $B = bx^3$ & $A' = 2 ayx$; donc $A' dx = 2 ayx dx$, & en intégrant dans la ſuppoſition de y conſtant, on trouve $A = ayxx$; donc l'intégrale ſera $ayx^2 dx + bx^3 dy + C dx$ qui eſt exacte, car en différentiant cette intégrale, on retrouve la propoſée. On ajoute $C dx$, parce que ce terme peut avoir diſparu en différentiant dans la ſuppoſition de dx conſtant; C eſt une conſtante arbitraire qu'on détermine par la nature du problême.

Comme cette matière eſt très-intéreſſante, nous croyons devoir encore ajouter quelques obſervations en faveur des commençans.

Soit V une fonction de deux variables x & y, de manière que l'on ait $dV = A dx + B dy$ & $dd V = A dd x + 2 C dx dy + D dx^2 + E dy^2 + B dd y$. Il eſt viſible qu'on doit avoir les quatre équations de condition $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$, $C = \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$.

Car, selon ce qu'on a dit ci-dessus (88), si $dV = A\,dx + B\,dy$, on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; mais $d^2V = A\,ddx + dA\,dx + B\,ddy + dB.dy$. Faisant $dA = D\,dx + C\,dy$, & $dB = M\,dx + E\,dy$, on aura $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = C$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Mais $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; donc $C = M$, & $dB = C\,dx + E\,dy$. Substituant les valeurs de dA & dB, il vient $ddV = A\,ddx + 2C\,dx\,dy + D\,dx^2 + E\,dy^2 + B\,ddy$.

COROLLAIRE. Donc une différentielle à deux variables dans laquelle on ne suppose aucune différence constante aura une intégrale finie si l'on a les quatre équations de condition dont on vient de parler, & son intégrale du premier ordre sera $A\,dx + B\,dy$, en ajoutant une constante.

Si l'on proposoit donc d'intégrer la formule $\frac{ddy}{x} - \frac{2dxdy}{x^2} + \frac{2ydx^2}{x^3} - \frac{yddx}{x^2}$, en comparant cette différentielle avec la formule $A\,ddx + 2C\,dx\,dy + D\,dx^2 + E\,dy^2 + B\,ddy$ (H), on trouvera $A = -\frac{y}{x^2}$, $D = \frac{2y}{x^3}$, $C = -\frac{1}{x^2}$, $E = 0$, $B = \frac{1}{x}$. Donc $\frac{(dA)}{dy} = -\frac{1}{x^2}$, $dB = -\frac{1}{x^2}$, & $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; $C = -$

$\frac{1}{x^2} = \frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; $\frac{(dA)}{dx} = \frac{2y}{x^3} = D$; $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$. Ainſi la propoſée a une intégrale finie; la première intégrale eſt $A\,dx + B\,dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2}$.

A l'égard de la ſeconde intégrale, il eſt facile de voir qu'elle eſt égale à la fraction $\frac{y}{x}$ plus une conſtante c.

Si une des différentielles dx, dy eſt ſuppoſée conſtante, dans ce cas l'on aura $ddx = 0$, ou $ddy = 0$; donc on aura, ou A, ou B $= 0$, & par conſéquent on ne ſauroit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Si l'on ſuppoſe $ddx = 0$, & qu'on efface le premier terme dans la formule H, on aura la formule $2C\,dx\,dy + E\,dy^2 + D\,dx^2 + B\,ddy$. Mais $\frac{(dA)}{dx} = D$; donc $\frac{(dA)\,dx}{dx} = D\,dx$, & S. $D\,dx = A + G$, G étant une quantité qui peut contenir une fonction de y, parce qu'on ſuppoſe y conſtant dans $\frac{(dA)}{dx}$. Pour connoître G, on fera attention à l'équation $\frac{(dA)}{dy} = C$, qui indique qu'on doit ajouter à A une quantité G qui donne $\frac{(dA)}{dy} = C$. Si cette équation a lieu ſans qu'on ſoit obligé de rien ajouter à A, dans ce cas on n'ajoutera rien à la

quantité A. On doit enſuite examiner ſi les trois autres équations ci-deſſus peuvent avoir lieu.

Soit propoſée la différentielle $2adx.dy + axddy + 2bdx^2$, comparant cette différentielle avec la formule H, je trouve $D = 2b$, $C = a$, $E = 0$, $B = ax$. On a donc S. $D\,dx = 2bx + G$, mais $\frac{(dA)}{dy} = 0 = C$, ce qui eſt abſurde. Afin donc que $\frac{(dA)}{dx}$ devienne $= C = a$, on doit ſuppoſer $G = ay$, & $A = 2bx + ay$. On a enſuite $\frac{(dB)}{dx} = a = \frac{(dA)}{dy}$, & $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$. Ainſi la différentielle propoſée réſulte de la différenciation d'une quantité finie. Ajoutant donc à la propoſée la quantité $A\,ddx = (2bx + ay)\,ddx$, ſon intégrale ſera $= (2bx + ay)dx + axdy + g$ conſtante.

Il eſt bon de remarquer que la quantité g doit renfermer dx lorſqu'on a fait cette différentielle conſtante, mais elle contiendra dy lorſqu'on aura fait $ddy = 0$.

Soit la formule $A\,ddx + 2C\,dx\,dy + D\,dx + Edy^2 + B\,ddy$, dans laquelle on n'ait pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Suppoſons que l'intégrale de la propoſée ſoit $= A\,dx + B\,dy$ (en ajoutant une conſtante), dont la différentielle $dA.dx + A\,ddx + B\,ddy + dB.dy$ (T) doit être égale à

la proposée. C'est pourquoi je fais $dA = D\,dx + N\,dy$, & $dB = M\,dx + E\,dy$; d'où je tire $\frac{(dA)}{dx} = D$, $\frac{(dA)}{dy} = N$, $\frac{(dB)}{dx} = M$, $\frac{(dB)}{dy} = E$. Car dans ce cas l'on ne peut pas faire $N = M$, puisqu'on ne suppose pas $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. Substituant les valeurs de dA & de dB que donnent ces équations dans la formule T, il vient $A\,ddx + N\,dy\,dx + D\,dx^2 + M\,dy\,dx + E\,dy^2 + B\,ddy$, quantité qui ne peut être égale à la différentielle proposée qu'autant que l'on aura $M + N = 2C$. Si les deux différentielles ddx, ddy s'y trouvent, l'intégrale sera très-facile à trouver ; car pour avoir lieu il suffit qu'on ait $2C = M + N = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$, $D = \frac{(dA)}{dx}$, $E = \frac{(dB)}{dy}$. Si ces équations ont lieu l'intégrale sera $Adx + B\,dy$.

Mais l'intégration sera bien moins facile si ddx, ou ddy manquent, car alors ou A, ou B ne sont pas constans. Si ddx manque, la différentielle aura la forme $D\,dx^2 + 2C\,dy\,dx + E\,dy^2 + B\,ddy$. Mais $2C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy}$ (P) ; donc $2C - \frac{(dB)}{dx} = \frac{(dA)}{dy}$. Ayant trouvé par le moyen de cette équation la valeur de $\frac{(dA)}{dy}$, l'ayant

multipliée par dy & intégrée dans la ſuppoſition de x conſtant, on aura $A + G$. Mais parce que dans cette intégration on a ſuppoſé x conſtant, il peut ſe faire que G ſoit une fonction de x; c'eſt pourquoi il faut trouver de nouveau la valeur de A par l'équation $D = \frac{(dA)}{dx}$, ou $S. D dx = A$, en regardant maintenant x comme variable. Si ces deux valeurs de A ne ſont pas les mêmes, on doit les ajouter enſemble, afin d'avoir la valeur de A corrigée. Si 2 C ne renferme pas $\frac{(dB)}{dx}$, l'équation P de condition n'aura pas lieu. Enfin l'on doit avoir $E = \frac{(dB)}{dy}$, & alors l'intégrale cherchée ſera $A dx + B dy + g dx$ (en écrivant $g dx$ au lieu de g).

Soit propoſé d'intégrer la différentielle $2axdx^2 - bx^2dy^2 - 2byxdxdy + 2cydydx - bx^2ydxdy$, dans laquelle on ſuppoſe dx conſtant, on aura $D = 2ax, -bx^2 = E, 2cy - 2byx = 2C = M + N, -bx^2y = B$. Mais $\frac{(dB)}{dx} = -2bxy$; donc le terme $\frac{(dB)}{dx}$ ſe trouve renfermé dans 2 C, & de-là $\frac{(dA)}{dy} = 2C - \frac{(dB)}{dx} = 2cy$, & $A = S. 2cydy + G = cy^2 + G$. Mais $S. D dx = A - ax^2$; donc $A = ax^2 + cy^2$. Enfin on a $\frac{(dB)}{dy} = -$

$bx^2 = E$; donc l'intégrale cherchée eſt $(ax^2 + cy^2)\,dx - bx^2\,y\,dy + g\,dx$.

Pour faire mieux comprendre aux commençans l'artifice de la méthode que nous venons de développer, ſoit l'équation $(a + bx^n)\,x^2\,ddy + (c + fx^n)\,x\,dx\,dy + (g + hx^n)\,y\,dx^2 = 0$. On aura donc $B = (a + bx^n)\,x^2$, $(c + fx^n)\,x = 2C$; $D = (g + hx^n)\,y$, & $E = 0$. On trouve à la vérité $\frac{(dB)}{dy} = 0 = E$, ce qui indique qu'on peut donner aux coefficiens a, b, c, &c les valeurs convenables pour rendre la propoſée intégrable. Mais l'on a S. $D\,dx = A = (gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1})\,y$; ce qui doit donner $2C = \frac{(dB)}{dx} + \frac{(dA)}{dy} = 2a.x + (n+2).bx^{n+1} + gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1} = cx + fx^{n+1}$. Pour que cette équation ait lieu, il faut qu'on ait $c = 2a + g$, $f = (n+2).b + \frac{h}{n+1}$. La ſubſtitution étant faite, l'équation propoſée devient $(a + bx^n)\,x^2\,ddy + (2a + g + (n+2).bx^n + \frac{hx^n}{n+1})\,x\,dx\,dy + (g + hx^n)\,y\,dx^2 = 0$; donc l'intégrale ſera $A\,dx + B\,dy = (gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1})\,ydx + (a + bx^n)\,x^2\,dy + C'dx = 0$, dans laquelle ſi $C' = 0$, il ſera facile de ſéparer les variables.

Si $A\,dx + B\,dy = 0$ eſt ſuſceptible d'une intégrale finie dans l'état où elle ſe trouve ; c'eſt-à-dire ſi l'on doit avoir $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, ou $gx + \frac{hx^{n+1}}{n+1} = (n+2).bx^{n+1} + 2ax$, ou $g = 2a$, $\frac{h}{n+1} = (n+2).b$, il ne ſera pas difficile de trouver les valeurs de c & de f, qui étant ſubſtituées dans la propoſée la rendront ſuſceptible d'une intégrale finie.

Soit $Adx + Bdy + Dd\zeta$, la différentielle générale du premier ordre & à trois variables A, B, D étant des fonctions quelconques des variables x, y, ζ. Si l'on différentie cette formule, on trouve $A\,ddx + dA.dx + Bddy + dB.dy + dD.d\zeta + Dddz$ (H). Suppoſons $dA = A'dx + A''dy + A'''d\zeta$, (en faiſant $A' = \frac{(dA)}{dx}$ *; $A'' = \frac{(dA)}{dy}$; $A''' = \frac{(dA)}{d\zeta}$), $dB = B'dx + B''dy + B'''d\zeta$, (en faiſant $B' = \frac{(dB)}{dx}$, $B'' = \frac{(dB)}{dy}$, $B''' = \frac{(dB)}{d\zeta}$); & $dD = D'dx + D''dy + D'''d\zeta$; il n'eſt pas difficile de trouver les valeurs de D', D'', D'''. Si l'on ſubſtitue dans la formule H les valeurs de

* Cette expreſſion marque la différentielle de A priſe en faiſant varier ſeulement x & diviſant le réſultat par dx.

dA, dB, dD, qu'on vient de trouver, il viendra $A\,ddx + A'dx^2 + (A'' + B')\,dx\,dy + (A''' + D')\,dx\,dz + B\,ddy + B''dy^2 + (B''' + D'')\,dy\,dz + D\,ddz + D'''dz^2$ (P). Si on suppose une des différentielles constante, on effacera dans la formule P le terme où se trouve la différence de cette différentielle : ainsi si l'on suppose dx constant, l'on aura $ddx = 0$, le terme $A\,ddx$ disparoîtra, & le reste sera la formule générale convenable à la supposition de dx constant.

Soit la différentielle du second ordre à trois variables avec leurs premières différences aussi variables $ax^3y^2\,ddx + 3ay^2x^2dx^2 + (2ax^3y + bz^2)\,dxdy + bxz^2\,ddy + 2bxzdydz$. En comparant cette différentielle à la formule P, on trouve $A = ax^3y^2$, $B = bxz^2$ & $D = 0$; donc l'intégrale, s'il y en a une, doit être $A\,dx + B\,dy = ax^3y^2dx + bxz^2dy$. En effet en différentiant cette intégrale, on trouve la différentielle proposée.

Il est aisé de voir comment on peut trouver des formules générales pour les différentielles des ordres supérieurs, à deux, ou à un plus grand nombre de variables pour en déduire les intégrales des différentielles d'un ordre quelconque.

162. L'on peut aussi en introduisant à la place de la plus haute différentielle de chaque variable une différentielle moins élevée d'une unité, réduire la proposée à une différentielle d'un ordre

inférieur, pour l'intégrer enſuite par les regles qui ſont propres à cet ordre.

Soit, par exemple, la différentielle du ſecond ordre $A\,dx^2 + A'\,dx\,dy + B\,ddy + B'dy^2$, en faiſant $d\,dy = du$, & par conſéquent $dy = u$, & $dx = c$ conſtante, on la réduira à la forme $A\,c\,dx + A'\,c\,dy + B\,du + B'u\,dy$, différentielle du premier ordre à trois variables. On cherchera par les méthodes ci-deſſus l'intégrale de cette différentielle ; ſuppoſons qu'elle ſoit trouvée, on y remettra dx au lieu de c, & dy au lieu de u, & l'on aura une différentielle du premier ordre à deux variables x & y qu'on tâchera d'intégrer de même. Si la propoſée renfermoit $d\,dx$, on feroit $d\,dx = dz$, ou $dx = z$, & l'on parviendroit encore facilement à une différentielle d'un ordre inférieur. Au reſte dans les équations des ordres ſupérieurs au premier, on peut ſuppoſer à volonté une première différence conſtante, & nous allons donner la méthode de rendre une des premières différences conſtantes, & réciproquement de rendre variables les premières différentielles dans les équations dans leſquelles on auroit ſuppoſé une conſtante.

Soit $A\,dx^2 + B\,dx\,dy + C\,dy^2 + d\,dy = 0$, une équation différentielle du ſecond ordre & à deux variables, dans laquelle la première différence dx eſt ſuppoſée conſtante. Pour la ramener à une différentielle qui ne renferme aucune différence conſtante, je diviſe la propoſée par dx afin d'avoir $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} +$

$\frac{D.d(dy)}{dx} = 0$. Il eſt viſible qu'à cauſe de dx conſtant, l'on peut mettre $\frac{D.d(dy)}{dx}$ au lieu de $\frac{D.ddy}{dx}$. Si l'on veut que dx ſoit variable, on aura alors en différentiant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, & l'équation ſe changera en celle-ci, $A\,dx + B\,dy + \frac{C\,dy^2}{dx} + D.\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}\right) = 0$, qui n'a aucune différence conſtante. Si on vouloit faire varier dx & rendre dy conſtant, on feroit $D\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = D.\left(-\frac{dy\,ddx}{dx^2}\right)$, en effaçant le terme $dx\,ddy$, à cauſe de $ddy = 0$.

Soit l'équation du troiſième ordre $a\,dx^3 + bdx^2\,dy + c\,dy^2\,dx + Ddy^3 + e\,dx\,ddy + fdy\,ddy + g\,d^3y = 0$, dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant. En diviſant par dx^2, l'on trouve $a\,dx + b\,dy + \frac{c\,dy^2}{dx} + \frac{D\,dy^3}{dx^2} + \frac{e\,ddy}{dx} + \frac{f\,dy\,ddy}{dx} + \frac{g\,d^3y}{dx} = 0$, qu'on peut écrire ainſi $a\,dx + b\,dy + \frac{cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + e\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) + f.\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right) + g.d\left(\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = 0$.

Si ſi dans cette équation on fait tout varier dans

les différenciations indiquées par la lettre d, on aura une équation du troiſième ordre ſans aucune première différence conſtante; & ſi dans les termes affectés du ſigne de différenciation, on ſuppoſe dy conſtant & dx variable, on aura une équation dans laquelle dy ſera conſtant.

On peut faire les transformations précédentes par le moyen de quelques ſubſtitutions qui peuvent être d'un grand uſage. Soient x & y les variables de l'équation propoſée, on introduira une nouvelle variable p en ſuppoſant $p\,dx = dy$; on fait de plus $qdx = dp$, $rdx = dq$, ou $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c., dx étant conſtant. Si on veut maintenant que dx & dy ſoient variables, on aura en différentiant, $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, & par conſéquent en diviſant cette valeur de dp par dx & différenciant de nouveau, l'on trouvera $dq = \frac{dx^2 d^3y - 3\,dx\,ddx\,ddy + 3\,dy\,ddx^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^4}$ *, & ainſi de ſuite. Soit, par exemple, la différentielle $\frac{x\,ddy}{dx^2}$, dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant. En faiſant $p\,dx = dy$, $dp = q\,dx$, elle ſe change en qx, & en ſubſtituant la valeur de q elle devient $= \frac{xdx\,ddy - xdyddx}{dx^3}$, différentielle qui ne contient plus aucune différence conſtante.

Soit la différentielle $\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$ dans laquelle

* L'expreſſion ddx^2 marque le quarré de ddx.

on ſuppoſe $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtante. En faiſant $dy = p\,dx$ & $dp = q\,dx$, cette différentielle ſe réduit à la forme $\frac{(1+pp)^2}{q}$ & en ſubſtituant $\frac{dy}{dx}$ au lieu de p, & $\frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^3}$ au lieu de q, on aura $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{dx^2\,ddy - dx\,dy\,ddx}$, expreſſion qui ne renferme aucune différentielle conſtante. Si on vouloit au contraire rendre conſtant dx, par exemple, on ſuppoſeroit $ddx = 0$, $d^3x = 0$, &c. & l'on effaceroit les termes où ſe trouveroient ces différentielles. Si on vouloit dans une équation du troiſième ordre rendre $d\,dx$ conſtant, on effaceroit le terme qui contiendroit d^3x. Si on avoit ſuppoſé une différentielle, par exemple, dx conſtante dans une équation donnée, en la réduiſant à une équation dans laquelle il n'y eût aucune différence conſtante, & faiſant enſuite la différentielle de dy égale à 0, on réduiroit la propoſée à une différentielle dans laquelle dy ſeroit conſtant.

163. Il peut arriver qu'une équation différentielle d'un ordre ſupérieur & à deux variables ſoit vague, c'eſt-à-dire, ne renferme aucun rapport certain entre les variables, ces ſortes d'équations ſont abſurdes & ne peuvent avoir lieu dans la ſolution d'aucun problême. Etant donnée une équation qui ne renferme aucune variable conſtante, on ſuppoſera dx conſtant, & on réduira enſuite le réſultat à une forme qui ne ſuppoſe aucune différence conſtante. Cela étant fait, on examinera ſi l'équation qui en réſulte s'accorde

avec la proposée. Si cela arrive, l'équation renferme un rapport déterminé entre x & y; dans le cas contraire ce rapport est vague: car il est visible qu'il est libre de supposer constante telle différentielle que l'on voudra, & qu'en différenciant deux fois de suite, par exemple, dans cette supposition une équation finie entre x & y, le résultat doit donner le même rapport que si l'on avoit supposé toutes les différences variables. Soit l'équation $b\,d\,dx + f\,d\,dy + g\,dx^2 + h\,dy\,dx + k\,dy^2 = 0$, qui n'a point de différentielle constante, & dans laquelle b, f, g, h, k sont des fonctions de x & de y. En faisant dx constant, on a $f\,ddy + g\,dx^2 + h\,dy\,dx + k\,dy^2 = 0$. Si dans cette équation on substitue la valeur de ddy que donne la supposition de $pdx = dy$, & qu'on fasse attention que $dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$, & qu'alors $dp.\,dx = ddy = q\,dx = ddy - \frac{dy\,ddx}{dx}$, l'on aura (en substituant cette quantité au lieu de ddy) l'équation $-\frac{f\,dy\,ddx.}{dx} + f\,ddy + g\,dx^2 + h\,dy\,dx + k\,dy^2 = 0$, qui ne differe de la proposée que dans le premier terme. Il faut donc voir si l'on a $b = -\frac{f\,dy}{dx}$. Si cela arrive, l'équation proposée exprimera un rapport déterminé entre x & y, autrement l'équation sera absurde. Il est donc nécessaire, afin que la proposée ne soit pas absurde, que

l'on ait $b + \frac{f\,dy}{dx} = 0$, ou $b\,dx + f\,dy = 0$; or cela peut arriver de deux manières, 1°. Si l'expreſſion $-\frac{f\,dy}{dx}$ eſt identique avec b, c'eſt-à-dire ſi elle eſt non-ſeulement $= b$, mais eſt effectivement b. 2°. Si l'équation $b\,dx + f\,dy = 0$, eſt l'équation différentielle du premier degré, qui étant différenciée, a donné la propoſée: Dans ce cas cette équation ſera l'intégrale de la propoſée. On le reconnoîtra en différenciant cette équation; car le réſultat doit donner la propoſée.

Soit l'équation ſans aucune différentielle conſtante $yy\,dd\,x - x\,x\,dd\,y + y\,dx^2 - x\,dy^2 + a\,dx\,dy = 0$. En comparant cette équation avec la formule générale précédente, on trouve $b = yy$, $-x\,x = f$, & l'équation $b\,dx + f\,dy = 0$, devient $yy\,dx - x\,x\,dy = 0$. Si l'on différencie cette équation & qu'on l'égale à la propoſée, on trouvera (B) $y\,dx^2 - x\,dy^2 + a\,dx\,dy = 2\,y\,dx\,dy - 2\,x\,dx\,dy$. Mais l'équation $yy\,dx - x\,x\,dy = 0$, donne $d\,y = \frac{yy\,dx}{x\,x}$; donc en ſubſtituant cette valeur de dy dans l'équation B, & diviſant enſuite par dx^2, il viendra $y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{a\,yy}{x\,x} = \frac{2\,y}{x\,x} - \frac{2\,yy}{x}$, ou $x^3 - y^3 + a\,x\,y = 2\,x\,yy - 2\,x\,x\,y$ (A). Voyons maintenant ſi cette équation s'accorde avec l'équation $yy\,dx - x\,x\,dy = 0$. En différentiant l'équation A & faiſant les opérations néceſſaires, on aura

aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax - 2xx + 4xy}$ (D); d'un autre côté l'équation $dy = \frac{yydx}{xx}$ donne $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$. Substituant dans l'équation D cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, ôtant la fraction, transposant & réduisant, il vient $3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$: d'où l'on tire $axy = 3y^3 + xxy - xxy - 3x^3$, mais de l'équation A, on tire $axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3$. Si l'on retranche cette dernière équation de la précédente, on trouvera $o = 2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$, équation qui peut se résoudre en celles-ci $o = y - x$, & $o = 2yy + yx + 2xx$, la première donne $y = x$ qui peut satisfaire à l'équation $dy = \frac{yydx}{xx}$; mais elle est incompatible avec l'équation finie $x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy$, à moins qu'on ne fasse $a = o$, ou qu'on ne suppose x & y constans : dans ce dernier cas $dx = o$, & $dy = o$, satisfont à toutes les équations différentielles à deux variables y & x, ce qui est absurde, & par conséquent l'équation proposée est absurde, du moins en supposant que a n'est pas $= o$.

Pour faire voir l'usage des transformations précédentes, soit proposée l'équation $dx^2dy - dy^3 = bdxddy + xdxddy$, dans laquelle on suppose dx constant, & qu'on ne voit pas tout

d'un coup être intégrable. Si nous rendons dx variable, en écrivant (par la méthode ci-deſſus) $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (bdx + xdx)d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & ſuppoſant dy conſtant dans la quantité renfermée dans la parenthèſe, nous aurons $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(bdx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, d'où l'on tire $dx^2 + xddx + bddx - dy^2 = 0$, dont on trouve facilement l'intégrale en faiſant $ddx = dz$ & $dx = z$; car l'équation devient $zdx + xdz + bdz - dy^2 = 0$, dont l'intégrale eſt $zx + bz - ydy = 0$. Donc en remettant la valeur de z & ajoutant encore la conſtante Cdy du même ordre, l'intégrale complette ſera $xdx + bdx - ydy + Cdy = 0$, & en intégrant de nouveau & ajoutant la conſtante C', on a $\frac{x^2}{2} + bx - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0$. On a fait l'intégrale de $dy^2 = ydy$, à cauſe de dy conſtant.

On n'a point de méthode générale pour connoître la quantité qui étant ſuppoſée conſtante, peut faciliter l'intégration, mais on réuſſira ſouvent par la méthode ſuivante. Il faut examiner s'il y a dans l'équation, deux ou un plus grand nombre de termes qui ſoient intégrables en les multipliant, ou en les diviſant par un facteur commun; l'on ſuppoſera que l'intégrale de ces termes ainſi multipliés ou diviſés, eſt conſtante.

Soit l'équation $2px^3dy^3 = dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy$, dans laquelle p eſt une fonction de x. Les deux termes $dx^2dy +$

$x\,dx\,ddy$ étant divisés par dx, donnent $dx\,dy + x\,ddy$, dont l'intégrale est $x\,dy$. Supposons donc que $x\,dy$ est $=$ C constante, on aura $x\,ddy + dy\,dx = 0$, & en multipliant par dx, on aura encore $xdxddy + dy\,dx^2 = 0$; donc l'équation proposée deviendra, après avoir effacé les termes $xdxddy + dx^2\,dy$, & divisé par $2x^3\,dy^3$, deviendra, dis-je, $p = \frac{dy^2 - xdyddx}{2x^3\,dy^3}$. Or l'équation $x\,ddy + dxdy = 0$, donne $dy = \frac{-xddy}{dx}$ donc $p = \frac{-xdy^2ddy}{2x^3\,dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3\,dy^3} = \frac{-dy^2\,ddy - dydxddx}{2x^2\,dx\,dy^3}$. Mais $xdy = C$, par supposition; donc $dy = \frac{C}{x}$, & $p = \frac{-dyddy - dxddx}{2CCdx}$, ou $2p\,dx = \frac{-dyddy - dxddx}{CC}$; & en intégrant, $2\int p\,dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{2C^2} + C' = \frac{-dy^2 - dx^2}{2x^2dy^2} + C'$, en remettant à la place de C sa valeur $x\,dy$. Il est aisé de voir qu'on intégreroit de même en supposant que p est une constante.

Soit l'équation $xy\,dx\,ddy = xy\,dy\,ddx = y\,dy\,dx^2 - yy\,dp\,dy^2 - x\,dx\,dy^2$ dans laquelle p est une fonction de y; dans cette équation il y a trois termes $xy\,dx\,ddx + y\,dy\,dx^2 =$

$x\,dx\,dy^2$, qui diviſés par $yy\,dy$ forment une différentielle complette $\frac{yx\,ddx+y\,dx^2-x\,dx\,dy}{yy}$; dont l'intégrale eſt $\frac{x\,dx}{y}$. En prenant cette intégrale pour conſtante, & différenciant, il vient $\frac{yx\,ddx+y\,dx^2-x\,dx\,dy}{yy}=0$; donc en ôtant la fraction & multipliant par dy, on a $yx\,dy\,ddx+y\,dy\,dx^2-x\,dx\,dy^2=0$. En tranſpoſant le terme $-xy\,dy\,ddx$ dans l'équation propoſée & effaçant enſuite dans le ſecond membre les trois termes dont la ſomme $=0$, il vient $xy\,dx\,ddy=-yy\,dp\,dy^2$; donc $dp=\frac{-x\,dx\,ddy}{y\,dy^2}$, dont l'intégrale eſt $p=\frac{x\,dx}{y\,dy}+C$, comme il eſt évident, $\frac{x\,dx}{y}$ étant ſuppoſé conſtant.

On peut quelquefois intégrer facilement en ſuppoſant conſtant le produit de pluſieurs différentielles. Soit, par exemple, l'équation $\frac{-a\,ddy}{dy^3}=\frac{d\,dx}{dy\,ddx}+\frac{b\,ddy\,ddd\,y}{dy^2\,ddx^2}$. Si on ſuppoſe le produit $dy\,ddx$ conſtant, tous les termes ſont intégrables & l'on a $\frac{a}{2\,dy^2}=\frac{dx}{dy\,ddx}+\frac{b\,ddy^2}{2\,dy^2\,ddx^2}+\frac{C}{dy^{\frac{2}{3}}\,ddx^{\frac{2}{3}}}$, en ajoutant la conſtante $\frac{C}{dy^{\frac{2}{3}}\,ddx^{\frac{2}{3}}}$ de même ordre que l'intégrale.

164. Pour que les commençans ne ſoient point embarraſſés en voulant intégrer une différentielle d'un ordre ſupérieur, nous allons donner la regle ſuivante :

Faites attention aux variables dont les différences ſe trouvent dans la différentielle propoſée ; raſſemblez dans une ſomme totale les termes affectés de la différence d'une même variable, en commençant par ceux où ſe trouve la différence de l'ordre le plus élevé ; intégrez enſuite cette ſomme comme ſi toutes les autres variables étoient conſtantes ; différenciez l'intégrale qui en réſultera, en faiſant varier ſucceſſivement toutes les variables qu'elle renferme, & retranchez le réſultat de la propoſée. S'il ne reſte rien, l'intégrale trouvée ſera celle qu'on cherchoit, en lui ajoutant une conſtante de ſon ordre. S'il y a un reſte, regardez le reſte comme une différentielle propoſée, & ſuivez, à l'égard de ce reſte, le même procédé, & ainſi de ſuite s'il y a un ſecond reſte, &c. Ajoutez toutes ces intégrales & la conſtante du même ordre & vous aurez l'intégrale cherchée. On pourra ſuivre le même procédé lorſque la différentielle ſera égalée à 0, pourvu qu'elle ſoit intégrable dans l'état où elle eſt.

Soit la différentielle $x^3y^2\,ddy + 2x^2y\,dx\,dy + 2x^3y\,dy^2 + 2xy^2\,dx^2 + 3x^2y^2\,dy\,dx$, dans laquelle on ſuppoſe dx conſtant. On doit conſidérer cette différentielle comme renfermant trois variables dy, x, y, puiſque ddy, dx & dy ſont les différences premieres de dy, x & de y. Le terme $x^3y^2\,ddy$ eſt celui où ſe trouve la différence de l'ordre le plus élevé, dont je

prends l'intégrale en regardant dy ſeul comme variable, cette intégrale eſt x^3y^2dy, dont la différentielle, en faiſant tout varier, eſt $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + 3y^2x^2dxdy$. Retranchant ce réſultat de la propoſée, il reſte $2x^2ydxdy + 2xy^2dx^2$. Regardant ce reſte comme une différentielle propoſée à deux variables y & x, on prendra l'intégrale du terme $2x^2ydxdy$, en ſuppoſant que y ſeul eſt variable, & l'on aura, à cauſe de dx conſtant, x^2y^2dx, dont la différentielle, en faiſant varier y & x, eſt $2x^2ydxdy + 2y^2xdx^2$; donc l'intégrale cherchée ſera $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$. En ajoutant la conſtante Cdx du même ordre, on n'ajoute pas Cdy au lieu de Cdx, parce que dy n'étant pas ſuppoſé conſtant, la différentielle de Cdy n'auroit pas été $= 0$, & par conſéquent ſe ſeroit trouvée dans la propoſée.

165. Il arrive ſouvent qu'en ajoutant ou en retranchant une même quantité on peut facilement intégrer une équation. Soit, par exemple, l'équation $xddy - yddx = 0$, qu'on ne peut intégrer dans cet état. Mais en ajoutant & retranchant $dxdy$, l'on aura $xddy + dxdy - yddx - dxdy = 0$, dont l'intégrale eſt $xdy - ydx$. On n'ajoute point de conſtante, parce qu'aucune différence n'a été ſupoſée conſtante.

Soit l'équation $fxddy - fyddx = bddy + addx$, ajoutant & retranchant dans le premier membre la quantité $fdxdy$, l'on trouve $fxddy + fdydx - fyddx - fdxdy = bddy$

$+ a\,d\,dx$, dont l'intégrale eſt $f\,x\,dy - fy\,dx = b\,dy + a\,dx$.

REMARQUE. Nous n'ajoutons pas ici de conſtante du même ordre, parce que la propoſée ne contenant aucune différentielle conſtante, la différentielle de cette conſtante n'auroit pas pu s'évanouir par la différenciation. On doit faire attention à cette remarque qui fait une exception à la regle ci-deſſus.

166. On peut quelquefois par la multiplication ou la diviſion, trouver facilement l'intégrale d'une équation propoſée. Soit l'équation $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{1}{y}$. En multipliant par dy, l'on aura $\frac{dyddy}{dx^2} = \frac{dy}{y}$, dans cette équation dx eſt ſuppoſé conſtant. En intégrant & ajoutant une conſtante C, il vient $\frac{dy^2}{2dx^2} + C = L.y$, ou $dy^2 + 2C\,dx^2 = 2\,dx^2\,L.y$. On ajoute une conſtante qui ne contient point de différentielle, parce qu'en multipliant enſuite par $2dx^2$, l'on a la conſtante $2C\,dx^2$ qui contient une différentielle.

Soit l'équation $y^2\,d\,dy = x\,dx\,dy - y\,dx^2$, dans laquelle on ſuppoſe dx conſtant. En diviſant par y^2, il vient $ddy = a\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}$, en écrivant a au lieu de la conſtante dx; donc en intégrant, on aura $dy = -a\frac{x}{y} = -\frac{x\,dx}{y} + C\,dx$, en ajoutant une conſtante & remettant la valeur de a.

167. Il eſt ſouvent utile d'employer les ſubſtitutions pour intégrer les équations différentielles des degrés ſupérieurs. Soit, par exemple, l'équation $(y-a).d^2x+(a-x).d^2y+dyddx-dxddy=0$. Si on ſuppoſe $dy=dx-dp$, ou $y=x-p$ & qu'on ſubſtitue dans la propoſée les valeurs de y, dy, ddy, d^2y que donne cette ſuppoſition, on trouvera en effectuant les multiplications indiquées, réduiſant & tranſpoſant, l'équation $xd^2p+dxddp-pd^2x-dpddx=ad^2p$, dont l'intégrale eſt $xddp-pddx=addp$, & en intégrant de nouveau, $xdp-pdx=adp$. Si l'on vouloit intégrer cette équation du premier ordre, on le pourroit en diviſant par $-pp$, ce qui donneroit $\frac{-xdp+pdx}{pp}=\frac{-adp}{pp}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x}{p}=-\frac{a}{p}+C=\frac{Cp-a}{p}$. Mais on ne connoit point de méthode générale qui indique la ſubſtitution qu'il faut employer dans les différens cas. L'uſage & le tatonnement feront ſouvent réuſſir.

168. On emploie auſſi avec avantage la méthode de demi-ſéparation ; elle conſiſte pour les équations des ordres ſupérieurs à diſpoſer l'équation de manière que les différentielles ſoient toujours jointes aux quantités dont elles ſont les différentielles, en rejettant dans les multiplicateurs ou diviſeurs communs de la quantité ſéparée, les quantités qui empêchent l'intégration. On égale à une nouvelle variable l'intégrale de la quantité ſéparée, & au moyen de cette ſuppoſition on donne une nouvelle forme à la propoſée juſqu'à ce qu'on arrive à une

équation intégrable, ou qu'on connoiſſe que l'on ne peut intégrer la propoſée par cette méthode. Au reſte il faut quelquefois beaucoup d'art pour préparer les équations, afin qu'elles deviennent intégrables par cet artifice.

Soit l'équation $a\,dz\,ddy - a\,dy\,ddz = dx\,dz^2$. Je la diſpoſe ainſi $\frac{dy}{dx}\cdot\left(\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz}\right) = \frac{dz}{a}$. La quantité compriſe dans la parenthèſe étant intégrable, je fais $\frac{ddy}{dy} - \frac{ddz}{dz} = \frac{dp}{p}$; donc L. dy — L. dz = L. p, ou L. $\frac{dy}{dz}$ = L. p, ou $\frac{dy}{dz} = p$; donc en ſubſtituant, $\frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p} = \frac{dz}{a}$ (A), ou $\frac{dp\,dz}{dx} = \frac{dz}{a}$ (à cauſe de $p = \frac{dy}{dz}$), & $dp = \frac{dx}{a}$. Donc $p = \frac{x}{a} + C$. Subſtituant ces valeurs de p & de dp dans l'équation A, & ôtant les fractions, l'on trouve $a\,dy = x\,dz + C\,a\,dz$ qui eſt l'intégrale de la propoſée.

Soit encore l'équation $x\,d^3y + 3\,dx\,ddy = -3\,dy\,ddx$, dans laquelle on ſuppoſe ddx conſtant; Pour la réduire à cette méthode, je la diſpoſe ainſi: $x\,d^3y + dx\,ddy = -3\,dy\,ddx - 2\,dx\,ddy$, le ſecond membre de cette équation eſt intégrable. Je donne à cette équation la forme $\left(\frac{d^2y}{ddy} + \frac{dx}{x}\right)\cdot x\,ddy = -3\,dy\,ddx - 2\,dx\,ddy$; je fais enſuite $\frac{d^2y}{ddy} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$; ou L. $x\,ddy$ = L. p, ou $p = x\,ddy$. Donc notre équation devient $dp = -3\,dy\,ddx - 2\,dx\,ddy$, & en intégrant, $p = x\,ddy = -y\,ddx - 2\,dx\,dy$, équation qu'on pourra réduire au premier ordre: car on a $x\,ddy + 2\,dx\,dy + y\,ddx = 0$, & en intégrant encore $x\,dy + y\,dx = 0$, & en intégrant encore $xy = C$.

169. PROBLÊME.. *Une équation différentielle d'un ordre quelconque étant supposée réductible à un ordre inférieur, intégrer cette équation.* On s'y prendra comme on a dit ci-dessus (164), & afin de pouvoir ajouter une constante chaque fois qu'on intégrera, on supposera une différence constante. Si cette méthode ne réussit pas, la proposée n'est pas complette : ainsi l'on peut par cette regle trouver si une différentielle, ou si une équation différentielle est complette ou non.

Nous allons maintenant donner la méthode de trouver le facteur qui peut rendre intégrable une équation différentielle d'un ordre supérieur lorsque cela est possible : nous supposerons une des premières différences constante, ce qu'il est facile d'obtenir en effaçant dans la proposée tous les termes qui contiennent les différences de cette prémière différentielle.

170. Soit $A\,ddy + B = 0$, l'équation générale qui peut représenter toute différentielle à deux variables x & y, dans laquelle dx est constant, & qui ne contient d'autre seconde différence que ddy, avec des puissances quelconques des premières différences dx & dy, A & B étant des fonctions de x, y, dx & dy. On peut écrire ainsi cette équation $A\,ddy + \frac{(B-K)dy}{dy} + \frac{K}{dx}dx = 0$, qui est la même que la précédente. On multiplie cette équation par le facteur M, fonction de x, y, dx, dy pour avoir $M\,Addy + M.\frac{(B-K)dy}{dy} + \frac{MK}{dx}dx = 0$ (P),

Suppoſant maintenant que cette équation eſt complette, & regardant y, x & dy comme autant de variables, & la différentielle P comme la même que celle-ci, $MA\,ddy + MB'\,dy + MC\,dx = 0$, en ſuppoſant $B' = \frac{B - K}{dy}$, & $- C = \frac{K}{dx}$, on aura (par le N°. 98), les trois équations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB')}{ddy}$; $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d.MC)}{ddy}$; $\frac{(d.MB')}{dx} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou en remettant les valeurs de B' & de C, les trois ſuivantes $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{ddy}$ (a); $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{ddy}$; $\frac{\left(d.M.\frac{B-K}{dy}\right)}{dx} = \frac{\left(d.\frac{MK}{dx}\right)}{dy}$, équation que je déſigne par (b), comme j'ai déſigné par (a) la premiere des trois dernieres.

La différentielle du produit $\frac{1}{dy}.M(B-K)$ priſe en ne faiſant varier que dy, après qu'on l'a diviſée par ddy, eſt $= -\frac{1}{dy^2}.M(B-K) + \frac{1}{dy}.\frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy}.\frac{(d.MK)}{ddy}$; donc la première des trois équations ci-deſſus devient $\frac{(d.MA)}{dy} = -\frac{1}{dy^2}.M(B-K) + \frac{1}{dy} \times$

$\frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy}.\frac{(d.MK)}{ddy}$ (R). La seconde équation étant la même que celle-ci $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{1}{dx}.\frac{(d.MK)}{ddy}$, donne $\frac{(d.MK)}{ddy} = dx.\frac{(d.MA)}{dx}$. Substituant cette valeur dans l'équation R, on trouvera après les opérations ordinaires $MK = MB - dy.\frac{(d.MB)}{ddy} + dx\,dy.\frac{(d.MA)}{dx} + dy^2 \times \frac{(d.MA)}{dy}$ (H), équation qui fera connoître K dès que M sera connu. Cette même équation donnera, en transposant, la valeur de $MB - MK$, ou de $M(B - K)$, & en substituant les valeurs de MK & de $M(B - K)$ prises dans cette équation, dans les équations ci-dessus *a* & *b*, on aura les deux équations suivantes.

$$\text{I.}\ \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{\left[d.\left(\frac{(d.MB)}{dyy} - dx.\frac{(d.MA)}{dx} - dy.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{ddy}\ \text{(T)}$$

$$\text{II.}\ \frac{\left[d.\left(\frac{(d.MB)}{ddy} - dy.\frac{(d.MA)}{dx} - dy.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{dx} = \frac{\left[d.\left(\frac{MB}{dx} - \frac{dy}{dx}.\frac{(d.MB)}{ddy} + dy\frac{(d.MA)}{dx} + \frac{dy^2}{dx}.\frac{(d.MA)}{dy}\right)\right]}{dy}\ \text{(V)}^*.$$

* L'expression $\frac{(d.BM)}{ddy}$ signifie qu'on doit différentier MB en faisant varier seulement *dy* & diviser par *ddy*.

La queſtion eſt donc réduite à trouver pour M une fonction de x, dx, dy qui ſatisfaſſe aux équations T & V qu'on vient de trouver, ce qui n'eſt pas facile, & nous ne connoiſſons point de méthode générale pour réuſſir.

Nous nous contenterons d'examiner quelques équations très-étendues après avoir fait remarquer qu'en ſuppoſant $M = 1$ dans les équations précédentes, on aura les deux équations de condition néceſſaires, pour qu'une formule différentielle, ou encore une équation différentielle à deux variables x & y avec dx conſtant, ſoit intégrable dans l'état où elle eſt.

171. Soit propoſée l'équation du ſecond ordre $E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2 + H\,ddy = 0$, dans laquelle dx eſt conſtant. E, F, G, H & le facteur M qui lui manque pour la rendre intégrable, ſont des fonctions de x & de y ſans dx, ni dy. En comparant cette équation à la générale, on aura $A = H$; $B = E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2$; donc $MB = ME\,dx^2 + MF\,dx\,dy + MG\,dy^2$. Subſtituant les valeurs de A, M. B & de B dans les équations T & V, & faiſant attention que E, F, G, H, M ne renferment ni dx, ni dy, l'équation T deviendra $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$. Cette valeur de $\frac{(d.MH)}{dy}$ étant auſſi ſubſtituée dans l'équation V, on aura

$$\frac{\left[d.\left(MF\,dx + MG\,dy - dx.\frac{(d.MH)}{dx}\right)\right]}{dx} =$$

$\frac{\left[d.\left(ME\,dx+dy.\frac{(d.MH)}{dx}\right)\right]}{dy}$. Si dans la première équation $MG=\frac{(d.MH)}{dy}$, on différencie en faisant seulement varier x, & qu'on divise ensuite par dx, on aura $\frac{(d.MG)}{dx}=\frac{\left[d.\left(\frac{(d.MH)}{dy}\right)\right]}{dx}$. Si on substitue cette valeur de $\frac{(d.MG)}{dx}$ dans la seconde équation, après avoir divisé chaque membre par dx, se souvenant que dx est toujours constant, & qu'on fasse attention que le dernier terme de chaque membre s'évanouit, on trouvera $\frac{(d.MF)}{dx}-\frac{[d.(d.MH)]}{dx\,dx}=\frac{(d.ME)}{dy}$, entendant par cette expression qu'on doit différentier MH en faisant varier x & diviser ensuite par dx, puis différentier le résultat en faisant varier x & divisant encore par dx. Les équations $\frac{(d.MF)}{dx}-\frac{[d.(d.MH)]}{dx\,dx}=\frac{(d.ME)}{dy}$ (A), & $MG=\frac{(d.MH)}{dy}=\frac{M(d.H)}{dy}+\frac{H(d.M)}{dy}$ sont celles qu'il faut traiter pour intégrer la proposée.

Dans la dernière équation on regarde y seul comme variable. En ôtant le diviseur, transposant & divisant par MH, il vient $\frac{dM}{M}=\frac{G\,dy}{H}-$

$\frac{dH}{H}$. Si l'on prend l'intégrale en regardant y seul comme variable, puiſque la différenciation a été faite dans cette ſuppoſition, on aura $L.M = S.\frac{Gdy}{H} - L.H + L.p$, $L.p$ eſt une fonction de x, parce qu'on a ſuppoſé x conſtant dans la différenciation. En multipliant $S.\frac{Gdy}{H}$ par $L.e = 1$, l'on aura $S.\frac{Gdy}{H}.L.e = L.e^{S.\frac{Gdy}{H}}$, & l'intégrale trouvée deviendra $M = \frac{p}{H}e^{S.\frac{Gdy}{H}}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de M dans l'équation A & qu'on diviſe par $e^{S.\frac{Gdy}{H}}$, on aura l'équation qui doit déterminer p. Mais p eſt une fonction de x ſans y; donc dans l'équation qui doit déterminer p, tous les y doivent diſparoître, autrement la propoſée ne peut devenir complette par la multiplication d'un facteur M qui ſoit compoſé de x, de y & de conſtantes, ou qui ſoit une fonction de x & de y.

Soit $2ydx^2 + (2x + 3yx)dxdy + 2x^2dy^2 + x^2ydydy = 0$, équation qui n'eſt pas complette, on aura $E = 2y$, $F = 2x + 3yx$, $G = 2x^2$, $H = x^2y$, $S.\frac{Gdy}{H} = S.\frac{2dy}{y} = L.y^2$, & $M = \frac{p}{x^2y}e^{L.y^2}$. Or

$e^{L.y^2} = y^2$: car $L.y^2 . L.e = L.y^2$; donc $L.e^{L.y^2} = L.y^2$, & $e^{L.y^2} = y^2$; ainſi $M = \frac{py^2}{x^2 y} = \frac{py}{xx}$. Subſtituant cette valeur de M & celles de H, F, E, dans l'équation A, on trouvera, en tranſpoſant & réduiſant, $\frac{2ydp}{xdx} - \frac{6yp}{x^2} + \frac{3y^2dp}{xdx} - \frac{3y^2p}{xx} - \frac{y^2ddp}{dx^2} = 0$. Égalant à 0 la ſomme des termes affectés de la même puiſſance de y, on aura les deux équations $\frac{2ydp}{xdx} - \frac{6yp}{x^2} = 0$, & $\frac{3y^2dp}{xdx} - \frac{3y^2p}{x^2} - \frac{y^2ddp}{dx^2} = 0$. La première donne $\frac{dp}{p} = \frac{3dx}{x}$, & la ſeconde après avoir diviſé par y^2 & ôté les fractions, donne $3xdpdx - 3pdx^2 - x^2ddp = 0$. La première équation étant intégrée, donne $L.p = 3L.x = L.x^3$; donc $p = x^3$. Cette valeur de p ſatisfait à la ſeconde équation ; on a donc $p = x^3$ & $M = \frac{py}{x^2} = xy$. Si l'on remonte à la valeur de MK & de M (B — K) que doit donner l'équation (H) ci-deſſus, on aura $MK = 2xyydx^2 + 3x^2y^2dxdy$, & $M(B - K) = 2x^2ydxdy + 2x^3ydy^2$; de ſorte que la

propoſée

proposée étant rapportée à la forme générale $MA\,ddy + M.\frac{(B-K)\,dy}{dy} + \frac{MK}{dx}\,dx = 0$, devient $x^3y^2\,ddy + (2xxydx + 2x^3ydy)\,dy + (2xyy\,dx + 3x^2y^2\,dy)\,dx = 0$, équation complette & dont l'intégrale, en ajoutant une constante, est $x^3y^2\,dy + x^2y^2\,dx + C\,dx = 0$.

Si après la substitution de la valeur de M dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx}$ — &c. tous les y disparoissent d'eux-mêmes, l'équation qui doit donner p est du second ordre, de manière qu'il paroît que dans ce cas la méthode ne fait rien connoître. Mais alors l'équation sera de cette forme $a\,dx^2 + bpdx^2 + cdpdx + fddp = 0$; a, b, c, f étant des fonctions de x sans y. Pour intégrer cette équation on l'écrit ainsi $a\,m\,dx^2 + b\,m\,p\,dx^2 + (c-k)\,m\,dx\,dp + k\,m\,dx\,dp + f\,m\,ddp = 0$, qui est la même que la précédente multipliée par le facteur m. Supposant ensuite que m & k étant des fonctions de x sans y, les quatre derniers termes soient une différentielle complette; alors le premier terme qui ne contiendra qu'une seule variable x, s'intégrera aisément; de plus, cette supposition donnera (par le N°. 89) les équations $\frac{(d.fm)}{dx} = \frac{[d.(mk\,dp + bmpdx)]}{ddp}$; $\frac{(d.fm)}{dp} = \frac{\left[d.\left((c-k)\,m.dx\right)\right]}{ddp}$;

$\frac{[d.(kmdp + bmpdx)]}{dp} = \frac{[d.(c-k)\,m\,dx]}{dx}$;

$\frac{[d.(c-k)\,m\,dx)]}{dx} = \frac{[d.bmpdx]}{dp}$. Mais parce que a, b, k, m, ne renferment point p, la ſeconde équation donne $o = o$, ou eſt nulle ; la première ſe réduit à $\frac{(d.fm)}{dx} = km$, & la troiſième avec la quatrième, à cauſe de dx conſtant, ſe réduiſent à $\frac{(d.(c-k).m)}{dx} = bm$. De l'équation $\frac{(d.fm)}{dx} = km$, on tire $\frac{f.(d.m)}{dx} + \frac{m.(d.f)}{dx} = km$, & $\frac{dm}{m} = \frac{kdx}{f} - \frac{df}{f}$; donc $L.m = S.\frac{k}{f}dx - L.f + L.h$, h étant une conſtante. Donc en ſuppoſant $L.e = 1$, on aura $m = \frac{h}{f} \times e^{S.\frac{k}{f}dx}$. de l'équation $\frac{[d.(c-k)\,m]}{dx} = bm$ on tire aiſément $\frac{dm}{m} = \frac{bdx - d(c-k)}{c-k}$. En égalant cette valeur de $\frac{dm}{m}$ à celle qu'on vient de trouver ci-deſſus, on aura l'équation $\frac{bdx - d(c-k)}{c-k} = \frac{kdx - df}{f}$; donc $bfdx - fdc + fdk = (c-k).kdx - (c-k)\,df$, ou $bfdx - k(c-k)\,dx + (c-k)\,df - fdc +$

$fdk = 0$, équation différentielle du premier ordre dont dépend la valeur de k. Supposant qu'on ait déterminé k par le moyen de cette équation, on aura m par l'équation $m = \frac{h}{f} e^{S.\frac{k}{h}dx}$; k & m étant supposés connus, on aura p en mettant les valeurs de k & de m dans l'équation $amdx^2 + bmpdx^2 + (c-k)mdxdp + kmdxdp + fmddp = 0$, & en intégrant. Comme cette équation doit être complette, en lui donnant cette forme $(amdx + bmpdx + kmdp)dx + ((c-k).mdx)dp + fmddp = 0$, & regardant cette équation comme une différentielle complette à trois variables, x, p, dp, on peut prendre pour intégrale celle du premier terme $(amdx + bmpdx + kmdp)dx$, en supposant x seul variable & traitant dx, p & dp dans la parenthèse comme constans; ce qui donne pour l'intégrale, $dx.S.amdx + pdx.S.bmdx + dp\,S.kmdx + C.dx = 0$ *, Cdx étant la constante ajoutée. Si on change maintenant p en y, on trouvera aisément que cette équation se rapporte à la forme de celle du (N°. 128); car en joignant ensemble le premier & le dernier terme, notre équation, sera réduite à trois termes.

* Il est aisé de voir que le terme mdx peut être écrit ainsi $dx.am$, multipliant par dx on aura $dx.amdx$, dont l'intégrale $= dx.S.amdx$, en regardant dx qui est devant le signe S, comme constant.

On aura donc la valeur de p : ainſi l'équation $E\,dx^2 + F\,dx\,dy + G\,dy^2 + H\,ddy = 0$, ſera toujours réductible au premier ordre lorſqu'il ne lui manquera, pour être complette, qu'un facteur compoſé de x, y & conſtantes, ou de x & y; mais ſi après la ſubſtitution de la valeur de M dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx}$ &c. l'équation renferme des y qu'on ne puiſſe faire diſparoître ſans aſſujettir les coefficiens E, F, G, H, à certaines conditions, c'eſt une marque que le facteur doit renfermer des dx ou des dy, ou même des dx & des dy à la fois; alors on aura recours à la méthode générale (170). On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas une équation différentielle du ſecond degré & d'une forme connue a beſoin d'un multiplicateur compoſé de x, y & conſtantes, ou de x & dy & conſtantes, &c.

172. Soit $A\,d^3y + B = 0$, l'équation générale du troiſième ordre & à deux variables x & y dans laquelle dx eſt ſuppoſé conſtant. Suppoſons que M fonction de x, y, dx, dy, ddy & de conſtantes, eſt le facteur qui peut rendre intégrable cette équation, on pourra l'écrire ainſi $A\,M\,d^3y + M.\frac{B-K}{ddy}\,ddy + M.\frac{K-H}{dy}.\,dy \pm \frac{M\,H}{dx}.\,dx = 0$. Suppoſant maintenant que cette équation eſt complette, on aura

$$\frac{(d.AM)}{ddy} = \frac{\left(d.M\frac{B-K}{ddy}\right)}{d^3y}; \quad \frac{(d.AM)}{dy} = \frac{\left[d.\left(M.\frac{K-H}{dy}\right)\right]}{d^3y};$$

$\frac{(d.\,AM)}{dx} = \frac{\left[d.\,\frac{MH}{dx}\right]}{d^3y}$; $\frac{(d.\,M\,\frac{B-K}{ddy})}{dy} =$
$\frac{(d.\,M\,\frac{K-H}{dy})}{ddy}$; $\frac{(d.\,M\,\frac{B-K}{ddy})}{dx} = \frac{(d.\,\frac{MH}{dx})}{ddy}$;
$\frac{(d.M\,\frac{K-H}{dy})}{dx} = \frac{(d.\,\frac{MH}{dx})}{dy}$. A l'aide de ces équations on tâchera de déterminer K, H, & M, il eſt aiſé de voir comment on doit s'y prendre pour les équations des ordres ſupérieurs; mais le calcul ſera d'autant plus pénible que l'ordre de l'équation ſera plus élevé.

REMARQUE. Lorſqu'on voudra intégrer une équation différentielle à deux variables x & y qui ne ſera pas complette, on pourra la multiplier par un facteur M, lequel facteur pourra être une fonction p de x ou une fonction q de y, ou une fonction r de y & de x enſemble, ou renfermer dy & dx, ou ddy, $dddy$, dx^2, &c. Ainſi on pourra avoir différens ordres de facteurs pour les équations différentielles du ſecond ordre, tels que p ; $pdx + q\,dy$; $pdx^2 + qdx\,dy + p\,dy^2$ &c. Si la propoſée eſt du ſecond ordre, on pourra d'abord eſſayer ſi le premier facteur p réuſſit, s'il ne réuſſit pas, on eſſayera le ſecond : ſi celui-ci ne réuſſit pas, on aura recours au troiſième, &c. On peut voir maintenant comment on doit trouver les facteurs des équations du troiſième ordre & de celles qui ſont plus élevées ; mais il eſt aiſé de comprendre combien ces ſortes de recherches ſont pénibles lorſque les équations ſont d'un ordre un peu élevé.

DE QUELQUES MÉTHODES POUR INTÉGRER OU POUR RÉDUIRE AUX ORDRES INFÉRIEURS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS, LORSQU'ELLES ONT CERTAINES CONDITIONS.

173. Soit l'équation $ddy = \frac{x\,d^3y}{dx} + \frac{a^3\,dx^5}{d^3y}$, je suppose $d^3y = t\,dx^3 = cc\,t\,dx$, en faisant $dx = c$. J'intégre en regardant dx comme constant, & j'ai $ddy = c^2$ S. $t\,dx = dx^2$ S. $t\,dx$; substituant dans la proposée les valeurs de ddy, & de d^3y qu'on vient de trouver, elle devient dx^2 S. $t\,dx = x\,t\,dx^2 + \frac{a^3\,dx^2}{t}$, ou en divisant par dx^2, S. $t\,dx = x\,t + \frac{a^3}{t}$. Donc en différenciant, $t\,dx = t\,dx + x\,dt - \frac{a^3\,dt}{t^2}$; ou $\left(x - \frac{a^3}{t^2}\right).dt = 0$ (H); d'où l'on tire $x - \frac{a^3}{t^2} = 0$, ou $t^2\,x = a^3$, ou $t = \frac{a\sqrt{(a)}}{\sqrt{x}} = \frac{d^3y}{dx^3}$, ou $2\,a\sqrt{a}.dx^2.\frac{dx}{2\sqrt{x}} = d^3y$, & en intégrant, $2\,a\sqrt{a}.\sqrt{x}.dx^2 + C dx^2 = ddy$; & en intégrant encore il vient $\frac{2.2\,a.\sqrt{a}.x^{\frac{3}{2}}}{3}.dx +$

$Cx\,dx + B\,dx = dy$, $B\,dx$ est une constante ajoutée. Si on integre encore, on trouvera $\frac{2.2.2a\sqrt{a.x^{\frac{5}{2}}}}{3.5} + \frac{Cxx}{2} + Bx + D = y$. Substituant les valeurs trouvées de ddy & d^3y dans la proposée, on trouvera après les opérations ordinaires $2a\sqrt{a.\sqrt{x}} + C = 2a\sqrt{a.\sqrt{x}}$. Cette équation doit être identique, & par conséquent on a $C = 0$; donc notre intégrale devient $\frac{2.2.2a\sqrt{a.x^{\frac{5}{2}}}}{3.5} + Bx + D = y$. De l'équation H, on tire encore $dt = 0$; donc en intégrant $t = C = \frac{d^3y}{dx^3}$, ou $C\,dx^3 = d^3y$; donc en intégrant, $Cx\,dx^2 + B\,dx^2 = ddy$: en intégrant encore, il vient $\frac{Cx^2dx}{2} + Bx\,dx + D\,dx = dy$; & enfin $\frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx + E = y$, équation qui appartient à une courbe du genre des paraboloïdes. Dans cette derniere équation il y a quatre constantes indéterminées; cependant l'intégrale complette d'une équation différentielle du troisième ordre ne doit renfermer que trois constantes indéterminées. Il faut donc en déterminer une par le moyen des autres; pour cela substituons dans la proposée les valeurs de ddy, & d^3y qu'on vient de trouver, il viendra après les opérations

ordinaires $Cx + B = Cx + \frac{a^3}{C}$. Cette équation devant être identique, fait voir que $B = \frac{a^3}{C}$; donc la vraie intégrale sera $\frac{Cx^3}{2.3} + \frac{a^3x^2}{2C} + Dx + E = y$.

Soit encore l'équation $ad^3y = \frac{xd^4y^2}{dx^5} + bdx^3$, on fera $d^4y = tdx$, & $d^3y = dx^3$. S. tdx. Les substitutions, en divisant par dx^3, donneront a S. $tdx = xtt + b$. Différenciez cette équation pour avoir $atdx = t^2dx + 2xtdt$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{a-t}$; donc en intégrant, ajoutant L. C au second membre & passant ensuite des logarithmes aux nombres, $a - t = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}$, ou $a - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}} = t$; donc $d^4y = dx^3 . \left(adx - dx\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x}}\right)$, & en intégrant, $d^3y = dx^3 . (B + ax - 2\sqrt{C}.\sqrt{x})$ (A). On substituera dans la proposée les valeurs de d^4y, d^3y, & l'on déterminera de cette manière les constantes C & B l'une par l'autre, & l'on aura après les opérations ordinaires $aB + a^2x - 2a\sqrt{C}.\sqrt{x} = a^2x - 2a\sqrt{C}.\sqrt{x} + C + b$, équation qui ne peut être vraie, à moins que aB ne soit $= C + b$, ou $B = \frac{C+b}{a}$. Après avoir déterminé la valeur de B en C, intégrons trois fois de suite l'équation A en ajoutant à chaque

fois une constante, on aura $y = F + Ex + \frac{Dx^2}{2} + \frac{Bx^3}{2.3} + \frac{ax^4}{2.3.4} - \frac{2.2.2.2\sqrt{C}.x^{\frac{7}{2}}}{3.5.7}$, équation qui, en substituant la valeur de $B = \frac{C+b}{a}$, sera l'intégrale complette de l'équation proposée. En général étant donnée une équation à trois termes de la forme $d^m y = xA + B$, dans laquelle A & B sont supposés des fonctions de dx, $d^{m-1}y$ & de constantes, on pourra l'intégrer en faisant $d^{m-1}y = t\,dx^{m-1}$, & en imitant ce qui vient d'être fait dans l'un ou l'autre des exemples précédens.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation $d^3y\,dy + a\,ddy.ddy + b\,d^2y\,dy^2 + e\,dy^4 = 0$, qui est la même que celle dont parle l'illustre M. d'Alembert, dans le tome VI de ses Opuscules, page 390, je ferois $dy = p\,dx$, dx étant constant, & $dx = q\,dp$; donc $ddp = -\frac{dq\,dp}{q}$. Substituant dans la proposée les valeurs de dy, ddy, d^3y, que donnent les suppositions, on a la transformée $-\frac{dq}{q} + \frac{a\,dp}{p} + bpq\,dp + ep^3q^2\,dp = 0$, équation du premier dégré. Si l'on fait $\frac{p^a}{q} = z$, ou $p^a = zq$, ou $ap^{a-1}dp = z\,dq + q\,dz$, ou $dq = \frac{ap^{a-1}dp - q\,dz}{z}$, on aura la nouvelle transformée $\frac{dz}{z} + \frac{bp^{a-1}dp}{z} + \frac{ep^{3-2a}dp}{z^2} = 0$; & supposant enfin $p^{a-2} = t$, on aura la derniere transf-

formée $d\zeta + b' dt + \frac{e' t\, dt}{\zeta} = 0$, équation homogène dans laquelle b' & e' ſont des conſtantes.

En faiſant $\frac{t}{\zeta} = u$, la derniere transformée ſe trouvera toute ſéparée. Or $\frac{t}{\zeta} = \frac{qp^{a+2}}{p^a} = p^2 q$; donc $q = \frac{u}{p^2}$. Ainſi en ſuppoſant $dy = p\, dx$ & $dx = \frac{u\, dp}{p^2}$, ou ce qui revient au même, en ſuppoſant $dy = \frac{dx}{dn}$, & $dx = -u dn$, ce qui donne $p = \frac{1}{n}$, l'équation ſe trouvera toute ſéparée.

Si $a+1$ étoit $= -1$, ou $a = -2$, la ſolution précédente ne pourroit avoir lieu parce que pour lors S. $p^{a+1}\, dp$ dépend des logarithmes. Mais dans ce cas on feroit $q = p^b \zeta$ (au lieu de faire $\frac{p^a}{q} = \zeta$), & on auroit la transformée $-\frac{h\, dp}{p} - \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{a\, dp}{p} + bp^{b+1}\zeta dp + ep^{3+2b}\zeta^2 dp = 0$, qui eſt homogene ſi l'on a $h+1+1 = -1$, & $3+2h+2 = -1$, ou ſi l'on a $h = -3$.

En général, ſoit $d^3 y$ le premier terme d'une équation compoſée de tant d'autres termes qu'on voudra $u (d^2 y)^k\, dy^m\, dx^{-m-2k+3} + a' (d^2 y)^{k'} \times dy^{m'}\, dx^{-m'-2k'+3}$ &c.; en ſuppoſant, comme ci-deſſus, &c. $dy = pdx$, & $dx = qdp$, la tranformée ſera $-\frac{dq}{q} + a\, dp . p^m\, q^{-k+2} + a' dp . p^{m'} q^{-k'+2}$ &c. $= 0$. Soit $q = p^s \zeta^t$, on aura la nouvelle transformée —

$\frac{s\,dp}{p} - \frac{t\,dz}{z} + a\,dp.p^{m-ks+2s} \times z^{-kt+2t} +$
$a'\,dp.p^{m'-k's+2s} \times z^{-k't+2t}$ &c. $= 0$; équation qui ſera homogene ſi $m - ks + 2s - kt + 2t = -1$, & ſi $m' - m's + 2s - k't + 2t = -1$; d'où l'on tire facilement $s + t = \frac{m-m'}{k-k'}$; & par conſéquent ſi $\frac{m-m'}{k-k'}$ eſt une quantité conſtante dans tous les termes, comparés deux à deux, la propoſée ſera intégrable. Dans le cas de l'équation ci-deſſus $d^3y + a\,dy.ddy +$ &c. $= 0$, on a $m = -1, k = 2, m' = 1, k' = 1, m'' = 3, k'' = 0$; donc $\frac{m-m'}{k-k'} = -2$, & $\frac{m-m''}{k-k''} = \frac{-1-3}{2} = -2$.

Dans l'équation $s + t = \frac{m-m'}{k-k'}$, on peut ſuppoſer à volonté t ou s tout ce qu'on voudra. Si, par exemple, on ſuppoſe $t = 0$, on fera $q = p'$.

Par la même méthode ſi ddy eſt le premier terme d'une équation du ſecond ordre dont les autres termes ſoient $+ a\,dy^k y^m dx^{2-k} + a'\,dy^{k'} y^{m'} dx^{2-k'}$ &c. On aura, en faiſant $dx = q\,dy$, la transformée $-\frac{dq}{q} + a\,dy.y^m q^{2-k} + a'\,dy.y^{m'} q^{2-k'}$ &c. $= 0$; équation qui ſera intégrable ſi $\frac{m-m'}{k-k'}$ eſt une conſtante; c'eſt pourquoi l'équation $d^2y + \frac{a\,dy^2}{y} + b\,y\,dy\,dx + e\,y^3 dx^2 = 0$, eſt intégrable, & ainſi des autres.

174. PROBLÊME. *Soit l'équation* $dx^3 - dx\,dy^2 = y\,dx\,d\,dx + 2x\,dy\,d\,dy$, *qu'on propoſe de réduire au premier ordre.* En ſuppoſant dx conſtant on aura $y\,dx\,d\,dx = 0$, & la propoſée

deviendra $dx^3 - dx\,dy^2 = 2x\,dy\,ddy$. Faisons $dy = z\,dx$ pour avoir $ddy = dz\,dx$ & $dx^3 - z^2\,dx^3 = 2x\,z\,dx^2\,dz$, ou $dx - z^2\,dx = 2x\,z\,dz$, ou $\frac{dx}{2x} = \frac{2z\,dz}{1-z^2}$; dont l'intégrale est $L.\,x = -L.\,(1-z^2) + L.\,C$, ou $x = \frac{C}{1-zz}$. Substituant dans cette intégrale la valeur de $z = \frac{dy}{dx}$, on trouve $x = \frac{C\,dx^2}{dx^2-dy^2}$.

Toutes les équations du troisieme ordre & à deux variables dans lesquelles les variables manquent peuvent s'intégrer par cette méthode.

Soit l'équation $dx\,d^3y + dx^2\,ddy = dx^4 + dy^4$, dans laquelle dx est constant, qu'on propose de réduire au premier ordre, je fais $dy = z\,dx$, ce qui donne $ddy = dx\,dz$, $d^3y = dd\,z\,dx$, & la proposée devient $dd\,z\,dx^2 + dx^3\,dz = dx^4 + z^4\,dx^4$, ou $dd\,z + dz\,dx = dx^2 + z^4\,dx^2$. Qu'on fasse maintenant $dz = p\,dx$, ou $dd\,z = dp\,dx$, on trouvera $dp + p\,dx = dx + z^4\,dx$; mais $dx = \frac{dz}{p}$; donc $p\,dp + p\,dz = dz + z^4\,dz$, dont l'intégrale donnera celle de la proposée.

En faisant $\frac{dy}{dx} = z$, ou $\frac{dx}{dy} = z$, & en substituant $z\,dy$ au lieu de dx, ou $z\,dx$ au lieu de dy, on peut souvent intégrer ou réduire à un ordre inférieur les équations différentielles à deux variables x & y, de quelque ordre quelles

ſoient. On ſe ſert de la première ſubſtitution lorſque la variable finie x ne ſe trouve pas dans l'équation, & de la ſeconde ſi la variable finie y manque dans la propoſée. Si la propoſée contient les différences ſupérieures ddy, d^3y, d^4y, &c. & que dx ſoit conſtant, on ſuppoſera $dy = \zeta dx$, d'où l'on tire $ddy = d\zeta dx$, $d^3y = dd\zeta dx$, $d^4y = d^3\zeta dx$, &c. Si au contraire l'équation contient les différences ddx, d^3x &c. & que dy ſoit conſtant, on fait $dx = \zeta dy$, $ddx = d\zeta dy$, &c.

175. PROBLÊME. *Intégrer l'équation différentielle à deux variables* $Ady^n + Bdx^n + Cdy^m dx^{n-m} + Ddy^p dx^{n-p} + Edy^q dx^{n-q} +$ &c. $= 0$, *dans laquelle les coefficiens* A, B, &c. *ſont des fonctions d'une ſeule variable* x, *ou* y *& de conſtantes, ou* 0. Si la variable finie, x ne ſe trouve pas dans la propoſée, on fera $dx = \zeta dy$; donc en ſubſtituant cette valeur de dx & diviſant enſuite l'équation par dy^n, on aura l'équation finie à deux variables ζ & y, $A + B\zeta^n + C\zeta^{n-m} + D\zeta^{n-p} + E\zeta^{n-q} +$ &c. $= 0$, par laquelle on tâchera de déterminer ζ en y, on y en ζ. On ſubſtituera une de ces deux valeurs dans la différentielle ζdy, & on aura $\zeta dy = R dy$, ou $\zeta dy = T d\zeta$, R étant une fonction de y, & T une fonction de ζ, & l'équation $dx = \zeta dy$, ſera changée en $dx = R dy$, ou $dx = T d\zeta$; donc en intégrant on aura $x = S.R dy + C$, & $x = S.T d\zeta$; la première intégrale donnera la valeur de x en y, & la ſeconde donnera la

valeur de x en z. Mais z étant une fonction de y comme le fait voir l'équation $A + Bz + \&c. = 0$, on pourra avoir auſſi la valeur de x en y par la ſeconde intégrale combinée avec l'équation $A + B z \&c. = 0$.

Si y manque dans l'équation, on fera $dy = z\,dx$: ſubſtituant cette valeur de dy dans la propoſée & diviſant enſuite par dx^n on aura l'équation finie $Az^n + B + Cz^m + Dz^p + Ez^q \&c. = 0$, par laquelle on tâchera de déterminer la valeur de z en x, ou celle de x en z, & ſubſtituant une de ces valeurs dans $z\,dx$, & procédant comme dans le premier cas, on trouvera la valeur de x en y au moyen de l'équation $dy = z\,dx$.

176. PROBLÈME. *Intégrer ou réduire au premier ordre l'équation générale du ſecond ordre à deux variables* $A\,ddy + B\,dy^2 + C'\,dx\,dy + D\,dx^2 = 0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant, & les coefficiens* A, B, *&c. ſont des fonctions de l'une des variables* x, *ou* y *& de conſtantes, ou* 0. Puiſque dx eſt conſtant, on fera $dy = z\,dx$; donc $ddy = dz\,dx$. Subſtituant ces valeurs dans la propoſée & diviſant par dx, il vient $A\,dz + Bz^2\,dx + C'z\,dx + D\,dx = 0$, équation différentielle du premier ordre & à deux variables z & x, lorſque y manque dans la propoſée. Si c'eſt x qui manque, on fera $dx = \frac{dz}{z}$. Subſtituant cette valeur de dx, & multipliant par z, la propoſée deviendra $A\,z\,dz + Bz^2\,dy + C'z\,dy + D\,dy = 0$, équation du premier

ordre à deux variables z & y. On cherchera l'intégrale de cette équation par les méthodes ci-deſſus, & on déterminera z en x, ou en y, ou celle de x, ou de y en z. Subſtituant une de ces valeurs dans $z\,dx$, l'équation $dy = z\,dx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$ ne contiendra plus qu'une ſeule variable dans chaque membre, & il ſera aiſé d'avoir ſon intégrale au moins par les quadratures.

Si x manque dans l'équation, on peut ſuppoſer $dx = z\,dy$, d'où, à cauſe de dx conſtant, on tire $0 = z\,ddy + dz\,dy$, ou $ddy = -\frac{dz\,dy}{z}$; donc en ſubſtituant ces valeurs de dx & de ddy, diviſant par dy & multipliant par z, la propoſée deviendra $-A\,dz + B\,z\,dy + C'z^2\,dy + D\,z^3\,dy = 0$, équation du premier ordre & à deux variables y & z, qui étant intégrée ſera connoître la valeur de y en z, ou celle de z en y, & ſubſtituant une de ces valeurs dans l'équation $dx = z\,dy$, on aura l'intégrale $x = S.\,z\,dy + C$; par où l'on déterminera la valeur de x en y. Les mêmes ſubſtitutions auront lieu & l'intégration ſe fera de même, quoique tous les termes de la propoſée ſoient affectés des puiſſances quelconques de dx & de dy, ou de leurs produits : on voit aiſément que toutes les différentielles doivent être homogenes dans tous les termes. On peut quelquefois employer la même méthode, quoique la différentielle conſtante ne ſoit ni dx, ni dy; mais une fonction comme $y\,dx$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, &c.

EXEMPLE I. Soit l'équation $py^3\,dy\,dx^3 = dx\,dy\,du^2 + y\,du^2\,ddx - y\,dx\,du\,ddu$, dans laquelle $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, p étant une fonction de y & de constantes. Si on prend dx pour constant, à cause de $ddx = 0$, la proposée, après avoir divisé par dx, deviendra $py^3\,dy\,dx^2 = dy\,du^2 - y\,du\,ddu$, dans laquelle x & u manquent. On fera donc $du = z\,dx$, & $ddu = dz\,dx$; donc, par substitution, $py^3\,dy\,dx^2 = z^2\,dy\,dx^2 - yz\,dz\,dx^2$. Si on multiplie cette équation par le facteur $M = \frac{1}{y^3\,dx^2}$, on aura $p\,dy = z^2y^{-3}\,dy - y^{-2}z\,dz$. L'intégrale de cette équation sera $S.pdy = -\frac{z^2y^{-2}}{2} + C = C - \frac{du^2}{2y^2dx^2}$, en substituant la valeur $\frac{du}{dx}$ de z.

Si on prend du pour constant, on a $ddu = 0$; si de plus on fait $dx = z\,du$, & $ddx = dz\,du$, la proposée deviendra, en effaçant le dernier terme, $py^3\,dy\,z^3\,du^3 = z\,dy\,du^3 + y\,dz\,du^3$, ou $p\,dy = \frac{z\,dy + y\,dz}{y^3z^3}$; & en intégrant, $S.\,p\,dy = C - \frac{1}{2y^2z^2} = C - \frac{du^2}{2y^2dx^2}$, comme auparavant.

EXEMPLE II. Soit encore l'équation $py^2\,dy\,dx^2 + du\,ddu = 0$, dans laquelle p est une fonction de y, sans aucune autre variable, $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & la différentielle $y\,dx$ constante. Les variables finies u, & x manquent dans l'équation, & parce que $y\,dx$ est constant, je suppose $du = z\,y\,dx$. Donc $ddu = y\,dx\,dz$; & par substitution, $py^2\,dy\,dx^2 + y^2z\,dz\,dx^2 = 0$, $p\,dy = -z\,dz$, & en intégrant $S.\,p\,dy = -\frac{zz}{2} + C = C -$

$C-\left(\frac{dx^2+dy^2}{2y^2dx^2}\right)$, parce que $z=\frac{du}{y.dx}$. Donc $2y^2dx^2.S.pdy=2Cy^2dx^2-dx^2-dy^2$, $dy^2=(2Cy^2-1-2y^2.S.pdy)dx^2$, & $dx=\frac{dy}{\sqrt{(2Cy^2-1-2y^2.S.pdy)}}$, équation dont chaque membre eſt une différentielle du premier ordre, & à une ſeule variable.

177. PROBLÊME. *Intégrer l'équation différentielle du troiſieme ordre* $ad^3y+bdyddy+cdxddy+fdy^3+gdxdy^2+hdx^2dy+kdx^3=0$, *dans laquelle les variables finies* x *&* y *manquent à la fois, &* dx *eſt conſtant.* On fera $dy=zdx$; donc $ddy=dzdx$, & $d^3y=ddzdx$; donc par ſubſtitution, & diviſant par dx, la propoſée deviendra $addz+bzdzdx+cdxdz+fddz+gz^2dx^2+hzdx^2+kdx^2=0$, équation du ſecond ordre à deux variables z & x, dans laquelle la variable finie x manque. On trouvera donc, par la méthode du problême précédent, l'intégrale de cette équation, qui fera connoître la valeur de z en x. Subſtituant cette valeur dans zdx, l'équation $dy=zdx$, aura les variables ſéparées, & en intégrant on aura $y=S.zdx+C$, équation qui fera connoître la valeur de y en x.

On intégrera de la même maniere & par les mêmes ſubſtitutions lorſque les puiſſances de dx, dy, ddy, ou leurs produits ſe trouveront dans les termes de la propoſée. Soit l'équation $dyddyd^3y+2dxdyddy^2-dx^2dy^4-3dx^6=0$,

EXEMPLE I. Soit l'équation $py^3\,dy\,dx^3 = \ldots$ dans laquelle $\ldots$, p étant une fonction de y & de $\ldots$ On prend dx pour constant, à cause de $\ldots$ proposée, après avoir divisé par dx, de- $\ldots$ manquent. On fera donc $du = z\,dx$, & $\ldots$ par substitution, $py^3\,dy\,dx^2 = \ldots$ Si on multiplie cette équation $\ldots$, on aura $p\,dy = z^2 y^{-3}\,dy$ $\ldots$ intégrale de cette équation sera $S.pdy = \ldots = C - \frac{du^2}{2y^2 dx^2}$, en substituant $\ldots$

$\ldots$ constant, on a $ddu = 0$; & de $\ldots$ $\ldots = dz\,du$, la proposée $\ldots$ dernier terme, $py^3\,dy\,z^3\,du^3$ $\ldots = \frac{z\,dy + y\,dz}{y^3 z^3}$; & en $\ldots = C - \frac{1}{2y^2 z^2} = C - \frac{du^2}{2y^2 dx^2}$.

$C - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{2y^2 dx^2}\right)$, parce que $y = \frac{dy}{ydx}$. Donc
$2y^2 dx^2 \cdot \int y dy = \pm C y^2 dx^2 - dx^2 - y^2$,
$dy^2 = (\pm C y^2 - 1 - 2y^2 \int y dy) dx^2$, &c. donc
$\frac{dy}{\sqrt{(\pm C y^2 - 1 - 2y^2 \int y dy)}} = dx$, équation dont le premier membre est une différentielle du premier ordre, & à une seule variable.

277. PROBLÈME. Intégrer l'équation différentielle du troisième ordre $adxddy + fdxy^2 + gdxy^2 + hdx^3 + kdx^3 = 0$, dans laquelle les variables x & y manquent à la fois, & où dx est constant. On fera $dy = pdx$; donc $ddy = dpdx$, $dddy = ddpdx^2$; donc par substitution, & en divisant par dx, la proposée deviendra $addp + fdx^2 + gdxdy + fdx^2 + hdx^2 + kdx^2 = 0$, équation du second ordre entre les variables p & x, dans laquelle la variable y manque. On trouvera donc, par la méthode du problème précédent, l'intégrale de cette équation, qui fera connoître p en x; & substituant cette valeur dans $y = \int p dx$, on aura les variables [illegible] on aura y [illegible] connoître la valeur de [illegible]

On intégrera de [illegible] pour mêmes [illegible] qu'une [illegible]ode.

[illegible]rs équations [illegible]n prenant pour

dans laquelle dx eſt conſtant, & qui ne contient aucune des variables finies x, y. On ſuppoſera donc $dy = zdx$, ce qui donne $ddy = dzdx$, $d^3y = ddzdx$. C'eſt pourquoi par ſubſtitution & en diviſant par dx^3, on aura $zdzddz + 2zdz^2dx - z^4dx^3 - 3dx^3 = 0$, équation qu'on peut intégrer par la méthode ci-deſſus (176), en faiſant $dz = udx$, $ddz = dudx$; car en ſubſtituant & diviſant par dx^2, l'on trouve $zudu + 2zu^2dx - z^4dx - 3dx = 0$, ou en mettant $\frac{dz}{u}$ au lieu de dx, & ôtant les fractions, $zu^2du + 2uuzdz - z^4dz - 3dz = 0$, équation du premier ordre à deux variables z & u, dont l'intégrale donnera la valeur de u en z. Cette valeur ſubſtituée dans $dx = \frac{dz}{u}$ donnera $x = S.\frac{dz}{u} + C.$ après l'intégration, par le moyen de cette équation, on aura z en x, & ſubſtituant cette valeur dans l'équation $dy = zdx$, & intégrant, on aura y en x.

178. PROBLÊME. *Intégrer l'équation du troiſieme ordre* $Ad^3y + Bdxddy + Cdx^3 = 0$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant & les coefficiens* A, B, C *des fonctions de* x *& de conſtantes, ou* 0. La ſuppoſition de $dy = zdx$ change la propoſée en celle-ci $Addz + Bdzdx + Cdx^2 = 0$, équation du ſecond ordre à deux variables x & z, dans laquelle la variable finie z manque. On cherchera donc par la méthode ci-deſſus (176), la valeur

de z en x, qu'on ſubſtituera dans l'équation $dy = z\,dx$, équation qui, en intégrant, donnera la valeur de y en x. L'intégration ſe fera de la même maniere lorſque les puiſſances, ou bien des fonction de dx, & de ddy ſe trouveront dans quelque terme que ce ſoit de la propoſée, pourvu que dy ne s'y trouve pas.

179. PROBLÊME. *Intégrer l'équation du quatrieme ordre* $a\,d^4y + b\,dx\,d^3y + c\,dx^2\,ddy + f\,dx^4 = 0$, *dans laquelle les variables finies* x *&* y *manquent, ou dans laquelle les coefficiens* a, b, c, f *ſont des conſtantes, ou zéro,* dx *étant conſtant.* Si l'on fait $dy = z\,dx$, & qu'on ſubſtitue les valeurs de d^4y, d^3y, ddy que donne cette ſuppoſition, la propoſée, en diviſant par dx, deviendra $a\,d^3z + b\,ddz\,dx + c\,dz\,dx^2 + f\,dx^3 = 0$, équation qui s'intégre par la méthode du problême ci-deſſus (177). Suppoſant qu'on ait trouvé la valeur de z en x; en intégrant l'équation $dy = z\,dx$, on aura la valeur de y en x.

Cette méthode peut s'appliquer aux équations différentielles à deux variable, du cinquieme ordre, dans leſquelles dx étant conſtant, les variables x & y, avec les différences dy, ddy & leurs fonctions manquent. On peut de-là paſſer aux différentielles des ordres ſupérieurs & trouver pour chaque ordre les conditions néceſſaires pour qu'une équation ſoit intégrable par cette méthode.

180. On peut auſſi ramener pluſieurs équations aux méthodes précédentes, & cela en prenant pour

conſtante une différentielle telle qu'elle faſſe diſparoître tous les termes qui empêcheroient l'équation d'être compriſe dans la forme des équations qu'on vient de traiter dans les problêmes précédens.

Soit l'équation $y\,dx\,ddx + 2x\,dy\,ddy = dx^3 - dx\,dy^2$. Si on prend dx pour conſtant, on aura $2x\,dy\,ddy = dx^3 - dx\,dy^2$, équation dans laquelle y manque, & qui eſt intégrable par notre méthode. Si on ſuppoſe dy conſtant, on trouvera une équation ſans x qui ſera encore intégrable.

On peut auſſi, par des ſubſtitutions, ramener pluſieurs équations à notre méthode.

Soit l'équation $x^n\,ddx = y\,ddy + dy^2 + y^2\,dy^2$, en ſuppoſant $y\,dy = dz$, ou $\frac{y^2}{2} = z$, on aura $y\,ddy + dy^2 = ddz$, & l'équation propoſée deviendra $x^n\,ddx = ddz + dz^2$, équation dans laquelle la variable finie z ne ſe trouve pas, & qui eſt intégrable par la méthode du problême ci-deſſus (176).

181. LEMME. *e etant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt* = 1, *ſi on fait* $x = e^{bu}$, *h étant une conſtante & u variable, on aura* $dx = he^{bu}\,du$, $ddx = he^{bu}(ddu + hdu^2)$, $d^3x = he^{bu}(d^3u + 3\,hdu\,ddu + hhdu^3)$, *&c.* Puiſque $x = e^{bu}$, on aura $L.\,x = L.\,e^{bu} = bu\,.\,L.\,e = bu$; donc en différenciant, $d.\,L.\,x$ ou $\frac{dx}{x} = b\,du$; $dx = bx\,du = be^{bu}\,du$; & en différenciant encore, $ddx = bx\,ddu + bdx\,du$

$= he^{bu}\,ddu + hhe^{bu}\,du^2 = he^{bu}(ddu + hdu^2)$, & ainſi de ſuite; donc &c.

182. COROLLAIRE I. Si on ſuppoſe dx conſtant ou $ddx = 0$, on aura $ddu = -hdu^2$.

183. COROLLAIRE II. Si on ſuppoſe $y = e^{ku}t$, k étant conſtant & t variable, il viendra $dy = t\,de^{ku} + e^{ku}\,dt = kte^{ku}\,du + e^{ku}\,dt = e^{ku}(kt\,du + dt)$, & en prenant les ſecondes différences on trouvera $ddy = e^{ku} \times (kt\,ddu + kkt\,du^2 + 2k\,dt\,du + ddt)$.

184. COROLLAIRE III. Si dans une équation à deux variables x & y, on ſuppoſe $x = e^{hu}$ & $y = e^{ku}t$, & qu'on ſubſtitue les valeurs qu'on tire de ces ſuppoſitions à la place de x, y, dx, ddx, dy, ddy, &c. L'équation ſera transformée en une autre telle que la variable finie u ne ſe trouvera que dans les expoſans de e. Maintenant ſi la propoſée eſt telle qu'on puiſſe faire diſparoître les quantités exponentielles dans l'équation transformée, elle deviendra une équation à deux variables u & t, dans laquelle la variable finie u manquera, & qui ne contiendra d'autres différentielles que du, dt, & les différences ddu, ddt, &c. On peut intégrer, par cette méthode, 1°. Toutes les équations à deux termes compriſes dans la formule $ax^m\,dx^p = y^n\,dy^{p-2}\,ddy$. 2°. Toutes les équations dont tous les termes ſont homogenes par rapport aux variables x, y &

leurs différences dx, dy, ddx, ddy, &c. 3°. Toutes les équations dans lesquelles la somme des exposans d'une même variable x & de ses différentielles est la même dans chaque terme.

185. PROBLÈME. *Intégrer l'équation* ax^m [redacted] $= y^n dy^{p-2} ddy$, *dans laquelle* dx *est constant.*

En supposant $x = e^{hu}$, $y = e^{ku} t$, & faisant attention que $ddu = -hdu^2$; par les substitutions, & les opérations ordinaires, la proposée deviendra $.ah^p e^{mhu+phu} du^p = e^{nku+pku-ku} t^n (ktdu + dt)^{p-2} (ddt + 2kdtdu + (kk-kh).tdu^2)$. Pour faire disparoître les quantités exponentielles, je suppose les exposans de e (dans les deux membres de l'équation) égaux; donc en divisant chaque membre par l'exponentielle qu'il renferme, on aura une équation sans exponentielles. Il faut donc supposer $mhu + phu = nku + pku - ku$, ou $\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p}$, & l'on peut prendre pour l'une des constantes h ou k, tel nombre qu'on voudra & déterminer l'autre par l'équation qu'on vient de trouver. Si l'on fait $h = n+p-1$, somme des exposans de y & de ses différences dans le terme $y^n dy^{p-2} ddy$; (car ddy est censé avoir 1 pour exposant), on aura $k = m+p$, somme des exposans de x & de dx dans le terme $nx^m dx^p$; si on prend $k = 1$, on aura $h = \frac{n+p-1}{m+p}$.

Supposant maintenant qu'on ait divisé l'équation

transformée par la quantité exponentielle qu'on ſuppoſe être la même dans les deux membres, on aura $ah^p\,du^p = t^n(ktdu+dt)^{p-2}.\left(ddt+2kdtdu+(kk-kh).tdu^2\right)$.... (A), équation dans laquelle la variable finie u manque.

En ſuppoſant $du = zdt$, on aura $ddu = dzdt + zddt$, & par la ſuppoſition de dx conſtant & de $du = zdt$, on a $ddu = -hdu^2 = -hzzdt^2 = dzdt + zddt$; donc $ddt = -hzdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Subſtituant dans l'équation A les valeurs de du & de ddt, multipliant par z & diviſant par dt^{p-1}, on aura $ah^p z^{p+1}dt = t^n(kzt+1)^{p-2}\left((2k-h).zzdt+(kk-kh)z^3dt-dz\right)$..... (B), équation du premier ordre à deux variables z & t, dont on cherchera l'intégrale par les regles ci-deſſus, après avoir ſubſtitué les valeurs de k & de h qu'on aura déterminées. Cette intégrale étant ſuppoſée connue, on aura la valeur de z en t, & ſubſtituant cette valeur dans zdt, on cherchera $S.zdt$; mais $du = zdt$; donc $u = S.zdt$, & $x = e^{bu} = e^{bS.zdt}$.

EXEMPLE I. On propoſe de réduire au premier ordre l'équation $xdxdy = ydddy$, dans laquelle dx eſt conſtant. Pour la comparer à la formule générale, je la diviſe par dy & j'ai $xdx = ydy^{-a}ddy$, comparant maintenant cette équation ainſi réduite à la formule $ax^m dx = y^n dy^{p-2}ddy$, j'ai $m=1$, $a=1$, $n=1=p$,

$\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = \frac{1}{2}$. Donc si l'on prend $k = 1$, on aura $h = \frac{1}{2}$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation B, on aura $\frac{1}{2} z^2 dt = t(zt+1)^{-1}\left(\frac{3}{2} zz dt + \frac{1}{2} z^3 dt - dz\right)$; ou en multipliant par $2.(zt+1)$, $z^3 t dt + z^2 dt = 3 z^2 t dt + z^3 t dt - 2 t dz$.

EXEMPLE II. Soit l'équation $\frac{a dx}{x} = \frac{ddy}{y dy}$ dans laquelle dx eſt conſtant, qu'on veut réduire au premier ordre, je lui donne cette forme $a x^{-1} dx = y^{-1} dy^{-1} ddy$. En comparant avec la formule générale, on trouve $m = -1$, $p = 1$, $n = -1$; donc $\frac{h}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = -\frac{1}{0}$, nombre infini; d'où l'on conclut que la méthode ne peut ſervir dans cette exemple, mais alors la réduction au premier ordre eſt facile. En effet, on a $a y dy dx = x ddy$; or dx étant conſtant, l'intégrale du premier membre eſt $\frac{a y^2 dx}{2}$, & celle du ſecond eſt $x dy - y dx$: car en différenciant cette dernière quantité dans la ſuppoſition de dx conſtant, il vient $x ddy + dx dy - dy dx = x ddy$. On aura donc $\frac{a y y dx}{2} = x dy - y dx + C dx$, C étant une conſtante.

Il eſt aiſé de voir que l'équation $y^2 ddy = x dx dy$, qui a embarraſſé autrefois les plus grands Géometres, ſe réduit facilement par la méthode du problême. Paſſons au ſecond cas.

186. PROBLÊME. *Intégrer les équations différentielles qui ſe rapportent à la formule générale* $a x^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + b x^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} +$ &c.

$= ddy$, *dans laquelle* dx *eſt conſtant, & la ſomme des dimenſions des variables* x *&* y *& de leurs différences* dx, dy, ddy *eſt la même dans chaque terme.* En faiſant $x = e^u$, $y = e^u t$, éliminant, au moyen de ces ſuppoſitions, x, y, dy, dx, & ddy; faiſant de plus attention que dx étant conſtant, on a $ddu = -hdu^2$, la propoſée devient, après les opérations ordinaires $e^u(tdt + 2dudt) = ae^u t^{-m-1} du^p (tdu + dt)^{2-p} + be^u t^{-n-1} du^q (tdu + dt)^{2-q} +$ &c. ou en diviſant par e^u, $ddt + 2dudt = at^{-m-1} du^p (tdu + dt)^{2-p} + bt^{-n-1} du^q (tdu + dt)^{2-q} +$ &c. équation du ſecond ordre & à deux variables u & t, dans laquelle la variable finie u ne ſe trouve pas.

On fera donc $du = zdt$, ou $u = S.zdt$, ce qui donne $x = e^u = e^{S.zdt}$, & $y = e^{S.zdt} t$, $ddu = zddt + dzdt$. Mais on a vu ci-deſſus que dx étant conſtant, $ddu = -hdu^2$, & ici $h = 1$; donc $ddu = -du^2 = -z^2 dt^2 = zddt + dzdt$, & $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$; donc en ſubſtituant & multipliant par z, on aura l'équation $zzdt - dz = at^{-m-1} z^{p+1} dt(2t+1)^{2-p} + bt^{-n-1} z^{q+1} dt(zt+1)^{2-q} +$ &c. équation du premier ordre à deux variables z & t, dont on cherchera l'intégrale par les regles ci-deſſus.

EXEMPLE. Soit l'équation $y^2 dx^3 + x^2 dy^3 - yxdxdy^2 - yxdydx^2 + yx^2 dxddy - xy^2 dxddy = 0$, qui eſt dans le cas du problême, puiſque dx eſt conſtant & que la ſomme des dimenſions de x, y, dx, dy, ddy

eſt la même, ſavoir y, dans tous les termes. En ſuppoſant comme dans la ſolution du problême $x = e^u$, $y = e^u t$, éliminant par ces ſuppoſitions x, y, dx, dy, ddy, la propoſée devient, après les réductions ordinaires, la transformée $dt^3 + 2tdudt^2 - t^2 dt du^2 + tdtdu^2 + tdu\,ddt - t^2 du\,ddt = 0$ ..... (A), dans laquelle la variable finie u ne ſe trouve pas. On fera donc $du = zdt$, d'où l'on tirera, comme dans la ſolution du problême $ddu = -du^2 = -z^2 dt^2 = dz\,dt + z\,ddt$, & $ddt = -z\,dt^2 - \frac{dz\,dt}{z}$. En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation A, l'on trouvera aiſément l'équation du premier ordre $(t^2 - t)\,dz + 2tz\,dt + dt = 0$, qui eſt dans le cas du problême ci-deſſus (128), & qui étant intégrée par la méthode de ce problême, donne $(t-1)^2 z + t - L.t = C$. Mais $du = z\,dt$, ou $z = \frac{du}{dt}$; donc en ſubſtituant cette valeur de z, multipliant par dt, tranſpoſant & diviſant, il viendra $du = \frac{C\,dt - t\,dt + dt.\,L.t}{(t-1)^2}$, & en intégrant, $u = \frac{t - C - t\,L.t}{t-1} + C'$. Mais $x = e^u$, ou $L.x = u\,L.e = u$, $y = e^u t$, $y = xt$, & $t = \frac{y}{x}$; ainſi notre intégrale devient $L.x = \frac{\frac{y}{x} - C - \frac{y}{x} L.\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} + C' = \frac{y - Cx - yL.y + yL.x - C'x + C'y}{y - x}$. Suppoſant $C + C' = m$, $1 + C' = n$, ôtant la fraction, tranſpoſant & réduiſant, il viendra $ny - mx = yL.y - xL.x$. Venons au troiſième cas.

189. PROBLÈME. *Intégrer les équations différentielles qui ſe rapportent à la formule générale*

$dx^m\,ddy = Px^n\,dy^{m+2} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m+2-n} + Rx^{m-p}\,dx^p\,dy^{m+2-p} +$ &c., *dans laquelle* dx *eſt conſtant & dont la ſomme des expoſans de* x *&* dx *eſt la même dans tous les termes*, P, Q, R, *&c. étant des fonctions de* y. Suppoſant $x = e^u$, on aura $dx = e^u\,du$: car $L.x = u\,L.e = u$, & $d.L.x = \frac{dx}{x} = du$, ou $dx = x\,du = e^u\,du$. Donc en ſubſtituant & diviſant enſuite par e^{mu}, la propoſée deviendra $du^m\,ddy = P\,dy^{m+2} + Q\,du^n\,dy^{m+2-n} + R\,du^p\,dy^{m+2-p}$ + &c. équation dans laquelle la variable finie u ne ſe trouve pas. On fera donc $du = z\,dy$, & l'on aura $ddu = -du^2 = -z^2\,dy^2 = z\,ddy + dz\,dy$; & $ddy = -z\,dy^2 - \frac{dz\,dy}{z}$. Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans la transformée & qu'on diviſe par dy^{m+1}, on aura $-z^{m+1}\,dy - z^{m+1}\,dz = P\,dy + Qz^n\,dy + Rz^p\,dy$ &c. équation du premier ordre à deux variables z & y, dont on cherchera l'intégrale par les regles connues. Cette intégrale étant ſuppoſée trouvée, on aura la valeur de z en y qu'on ſubſtituera dans l'équation $du = z\,dy$; & parce que $L.x = u$, il viendra $L.x = S.z\,dy$, équation qui ne contiendra que les variables x & y.

EXEMPLE. Soit l'équation $z\,dd x^2\,dy + ax\,dx\,ddy = 2x\,dx\,dy^2 + 2x^2\,y\,ddy$, dans laquelle dx eſt conſtant & la ſomme des expoſans de x & de dx eſt 2 dans tous les termes ; les coefficiens z, a, & 2 des

termes où se trouve dy, sont des fonctions de y^0, & de constantes.

Supposant $x = e^u$ & $du = z\,dy$, on aura $dx = e^{S.z\,dy} z\,dy$, & $ddy = -z\,dy^2 - \frac{dz\,dy}{z}$. Substituant ces valeurs de x, dx, ddy dans la proposée, divisant par $dy^2\, e^{2S.z\,dy}$ & réduisant, on a $a z^2\,dy - a\,dz = -\frac{2\,dz}{z}$, ou $a\,dy = \frac{a\,dz}{zz} - \frac{2\,dz}{z^3}$; & en intégrant, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz} + C$. . . . (A). On aura, par cette intégrale, la valeur de z en y, & la substituant dans la différentielle $z\,dy$, on aura l'intégrale L. $x = S.z\,dy$. On peut parvenir à une équation différentielle du premier ordre par l'équation L. $x = S.z\,dy$: car en différenciant, on a $\frac{dx}{x} = z\,dy$, $z = \frac{dx}{x\,dy}$, & substituant cette valeur de z dans l'intégrale A, on trouvera, après les opérations ordinaires, $ay\,dx^2 = x\,x\,dy^2 - a\,x\,dx\,dy + C\,dx^2$.

188. PROBLÊME. *Intégrer l'équation* $dx^{m-1}\,ddx = A x^n\,dy^{m+1} + B x^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} + D x^{m-p}\,dx^p\,dy^{m-p+1} +$ &c. *dans laquelle* dy *est constant*, A, B, D, &c. *sont des fonctions de* y, *la somme des exposans de* x & *de ses différences* dx, ddx *est* m *dans tous les termes.* Supposant $x = e^u$, on aura $dx = e^u\,du$, $ddx = e^u(ddu + du^2)$, substituant ces valeurs dans la proposée & divisant par e^{mu}, il vient $du^{m+1} + du^{m-1}\,ddu = A dy^{m+1} + B\,du^n\,dy^{m-n+1} + D\,du^p\,dy^{m-p+1} +$ &c. équation dans laquelle u ne se trouve pas. On supposera donc $du = z\,dy$, ce qui donnera $ddu = dz\,dy$, à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la transformée & divisant par dy^m,

on a $z^{m+1}dy + z^{m-1}dz = A\,dy + Bz^n dy + Dz^l dy +$ &c. équation du premier ordre, dont on cherchera l'intégrale par les regles connues.

EXEMPLE. Soit proposée l'équation $2dxdy = a\,ddx - y\,ddx$, ou $x^0\,ddx = \frac{2dxdy}{a-y}$, dans laquelle dy est constant, la somme des exposans de x & de ses différences est 1 dans chaque terme, & le coefficient $\frac{2}{a-y}$ du terme où se trouve dy, est une fonction de y. On fera $x = e^u = e^{\int z\,dy}$ (en supposant $du = z\,dy$), $dx = e^{\int z\,dy} z\,dy$, $ddx = e^{\int z\,dy}(z^2\,dy^2 + z\,ddy + dz\,dy) = e^{\int z\,dy}(z^2\,dy^2 + dz\,dy)$ à cause de dy constant. Substituant ces valeurs dans la proposée, on trouve, après avoir divisé par dy, $2z\,dy = az^2\,dy + a\,dz - 2zy\,dy - y\,dz$, équation du premier ordre. Si on met la proposée sous cette forme $2dx\,dy + y\,ddx = a\,ddx$, on aura en intégrant dans la supposition de dy constant, $y\,dx + x\,dy = a\,dx + C\,dy$.

189. Les méthodes précédentes peuvent s'appliquer aux équations différentielles de tous les ordres, pourvu qu'elles puissent se rapporter aux cas dont on a parlé ci-dessus (184). Soit l'équation générale $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} \ldots + \frac{N\,d^n y}{dx^n} = 0$, dans laquelle les coefficiens A, B, C, &c. ayent les conditions requises, dx étant constant. Supposons $du = z\,dx$, $y = e^u = e^{\int z\,dx}$, on aura $dy = e^{\int z\,dx} z\,dx$, $\frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx} z$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^{\int z\,dx}\left(zz + \frac{dz}{dx}\right)$; $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int z\,dx}\left(z^3 + \frac{3z\,dz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$; &c. Substituant ces valeurs dans la proposée, elle sera divisible par $e^{\int z\,dx}$,

& elle deviendra de l'ordre $n-1$. Il eſt évident qu'en ſuppoſant égaux à 0 tous les coefficiens, excepté ceux des deux termes qu'on veut réduire à un ordre inférieur, on aura une équation à deux termes qu'on tâchera de réduire en imitant ce qu'on a fait ci-deſſus pour les équations qui ſe rapportent au premier cas. Pour les autres cas, on déterminera les coefficiens, de manière que les termes ayent les conditions néceſſaires.

190. La méthode dont nous avons parlé ci-deſſus (147) peut facilement s'appliquer aux équations des ordres ſupérieurs, c'eſt-à-dire, que ſi l'on a un nombre N d'équations différentielles renfermant le nombre N + 1 de variables t, x, y, z, u, &c. chaque équation pouvant ſe réduire à la forme ſuivante (H) $o \ldots . o = k + ax + by + cz$ + &c. $+ \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'dz}{dt}$ + &c. $+ \frac{a''ddx}{dt^2} + \frac{b''ddy}{dt^2} + \frac{c''ddz}{dt^2}$ + &c. $+ \frac{a'''d^3x}{dt^3} + \frac{b'''d^3y}{dt^3}$ + &c... $+ \frac{Ad^nx}{dt^n} + \frac{Bd^ny}{dt^n} + \frac{Cd^nz}{dt^n}$ + &c. dans laquelle dt eſt conſtant, k une fonction de t, a, b, &c., a', b', &c., a'', b'', &c., a''', b''', &c., A, &c. ſont des conſtantes quelconques ou o, on pourra intégrer ces équations par la méthode (du N°. 147), en ſuppoſant $dx = p\,dt$, $ddx = q\,dt^2$, $d^3x = r\,dt^3$, &c. juſqu'à $d^{n-1}x = s\,dt^{n-1}$; & de même $dy = p'dt$, $ddy = q'dt^2$, &c. $dz = p''dt$, $ddz = q''dt^2$, &c. Or dt étant conſtant, de l'équation $dx = p\,dt$, on tire $ddx = dp\,dt = q\,dt^2$, $dddx = dq\,dt^2 = r\,dt^3$, &c. Donc en ſubſtituant & réduiſant, l'équation H devient $o = k + ax + by + cz$ + &c. $+ \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'z}{dt}$ + &c. $+ \frac{a''dp}{dt} + \frac{b''dp'}{dt} + \frac{c''dp''}{dt}$ + &c. $+ \frac{a'''dq}{dt} + \frac{b'''dq'}{dt}$ + &c..... $+ \frac{Ads}{dt} + \frac{Bds'}{dt} + \frac{Cds''}{dt}$ + &c. équation du pré-

mier ordre. On aura de plus autant d'équations de la forme requise (147) qu'on aura introduit de nouvelles variables p, p', p'', &c. q, q', &c dans la formule (H). Car puisque $dx = p\,dt$, on aura $dx - p\,dt = 0$, & parce que $ddx = q\,dt^2 = dp\,dt$, on aura $dp = q\,dt$ & $dp - q\,dt = 0$, &c. On a de même $dy - p'\,dt = 0$, $dp' - q'\,dt = 0$, &c. Donc en multipliant toutes ces équations excepté une par des constantes indéterminées, on les intégrera par la méthode ci-dessus (N°. 147).

Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre $T\,ddx + a\,T\,dx\,dt + b\,x\,T\,dt^2 + T'\,dt^2 = 0$, dans laquelle dt est constant & T, T' sont des fonctions de t. Divisant cette équation par $T\,dt^2$ & supposant $\frac{T'}{T} = b$, on lui donne la forme (H) .... $0 = k + b\,x + \frac{a\,dx}{dt} + \frac{ddx}{dt^2}$. On fera donc $dx = p\,dt$; ce qui donne $ddx = dp\,dt$, & substituant cette valeur de dx dans l'équation H, on aura, en ôtant les fractions, $dp + a\,dx + bx\,dt + k\,dt = 0$. On a de plus l'équation $dx - p\,dt = 0$: ces équations ont les conditions qu'exige la méthode (du N°. 147). Multipliant la seconde par la constante indéterminée A, ajoutant le produit à la première, on aura $dp + (A + a)\,dx + (bx - Ap)\,dt + k\,dt = 0$ .... (M). On supposera ensuite, suivant la méthode, $bx - Ap = mp + m(A + a)x$ .... (P), m en étant une constante indéterminée; & comparant terme à terme les deux membres de cette équation, on aura $bx = m(A + a)x$, & $-Ap = mp$, d'où l'on tire $m = -A$, & $m = \frac{b}{A + a} = -A$; donc $A^2 + aA = -b$, & $A = \frac{-a \pm \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, ce qui donne deux valeurs de A que nous exprimerons par A & A', & aussi deux valeurs correspondantes de m que nous désignerons par m & m'. En substituant ces valeurs dans l'équation P, & supposant $p + (A + a)x = u$, $p + (A' + a)x = u'$, l'équation M sera changée en ces

deux autres $du+mudt+kdt=o$, & $du'+m'u'dt+kdt=o$, qu'on intégrera par le (N°. 128). On trouvera donc u & u' en t, & enſuite les deux équations $p+(A+a)x=u$, $p+(A'+a)x=u'$, donneront la valeur de x en t.

Soit maintenant l'équation du troiſième ordre $Td^3x+aTddxdt+bTdxdt^2+cxTdt^3+T'dt^3=o$, dans laquelle dt eſt conſtant. En diviſant par Tdt^3 & faiſant $\frac{T'}{T}=k$, on trouvera aiſément l'équation $o=k+cx+\frac{bdx}{dt}+\frac{addx}{dt^2}+\frac{d^3x}{dt^3}$, qui a la forme requiſe. On ſuppoſera donc $dx=pdt$, $ddx=qdt^2=dpdt$, $d^3x=dqdt^2$, d'où l'on tirera $o=k+cx+\frac{bdx}{dt}+\frac{adp}{dt}+\frac{dq}{dt}$, ou $dq+adp+bdx+cxdt+kdt=o$. On a de plus $dx-pdt=o$, & $dp-qdt=o$; or ces trois équations ſont ſuſceptibles de la méthode du (N°. 147. En ſuivant cette méthode & multipliant la ſeconde par A & la troiſième par B, ajoutant enſuite les trois équations, &c. déſignant par m, m', m'' les trois valeurs de m qu'on aura dans ce cas, on parviendra aux trois équations $du+mudt+kdt=o$, $du'+m'u'dt+kdt=o$, $du''+m''u''dt+kdt=o$, qu'on intégrera par la méthode du (N°. 128). On trouvera les valeurs de u, de u' & de u'' en t, & l'on aura de plus les trois équations $q+(a+B)p+(b+A)x=u$, $q+(a+B')p+(b+A')x=u'$, $q+(a+B'')p+(b+A'')x=u''$, dans leſquelles A, A', A'', déſignent trois valeurs de A, & B, B', B' les trois valeurs correſpondantes de B. Ces équations donneront les valeurs de x en t.

Soit propoſé maintenant d'intégrer les équations ſuivantes du ſecond & du troiſième degré:

$$o=k+ax+by+\frac{cdx}{dt}+\frac{fdy}{dt}+\frac{ddx}{dt^2},$$

$$o=k'+gx+\frac{hdy}{dt}+\frac{d^3y}{dt^3},$$

dans

dans lesquelles dt est constant, & k, k' des fonctions de t. On fera $dx = p\,dt$, $ddx = dp\,dt$, $dy = q\,dt$, $ddy = r\,dt^2 = dq\,dt$, $d^3y = dr\,dt^2$; donc $dq\,dt = r\,dt^2$. Substituant $dp\,dt$ au lieu de ddx, & $dr\,dt^2$ au lieu de d^3y, dans les équations proposées, on trouvera facilement les transformées $dp + c\,dx + f\,dy + (ax + by)\,dt + k\,dt = 0$, $dr + h\,dy + g\,x\,dt + k'\,dt = 0$. On aura de plus les trois équations suivantes $dx - p\,dt = 0$; $dy - q\,dt = 0$; $dq - r\,dt = 0$. Ces cinq équations ayant les conditions que demande la méthode ci-dessus (147), on multipliera la seconde par A, la troisième par B, la quatrième par C & la cinquième par D, A, B, &c. sont des constantes indéterminées. Ajoutant ensuite toutes ces équations, on aura la somme (H) .... $dp + D\,dq + A\,dr + (c + B)\,dx + (f + hA + C)\,dy + (ax + gA\,x + by - Bp - Cq - Dr)\,dt + (k + Ak')\,dt = 0$. Ensuite m étant un facteur constant & indéterminé, on supposera, selon la méthode, $(a + gA)\,x + by - Bp - Cq - Dr = m.[p + Dq + Ar + (c + B)\,x + (f + hA + C).y] = m\,u$. En développant le second membre de cette équation & égalant les termes homologues, on aura les équations suivantes: $m = -B$; $mD = -C$; $mA = -D$; $m.(c + B) = a + gA$; $m.(f + hA + C) = b$, & l'équation H deviendra $du + mudt + (k + Ak')\,dt = 0$, qu'on pourra intégrer par la méthode ci-dessus (128); après avoir déterminé les valeurs de A & de m par les équations qu'on vient de trouver, ce qui est facile: car puisque $B = -m$; $D = -mA$; & $C = -mD = mmA$, si on substitue ces valeurs de B, de C & de D dans les deux équations $m.(c + B) = a + gA$; $m.(f + hA + C) = b$, elles deviendront $m(c - m) = a + gA$, & $m(f + hA + mmA) = b$, d'où l'on tire $A = \frac{Cm - m^2 - a}{g} = \frac{b - fm}{hm + mmm}$, & de-là une équation du cinquième degré qui donnera cinq valeurs de m, d'où l'on déduira cinq valeurs correspondantes pour chacun des facteurs A, B, C, D. On fera le reste comme dans les exemples précédens, au moyen des deux équations $du + mudt + (k + Ak')\,dt = 0$, & $p + Dq + Ar + (c + B)x + (f + hA + C)y = u$.

191. PROBLÊME. *Trouver l'intégrale finie & complette de l'équation du ſecond ordre* $o = -y + \frac{x\,dy}{dx} + \frac{a\,x\,ddy}{dx^2}$. Si l'on fait $y = cx + xz$ (c étant une conſtante arbitraire) & qu'on ſubſtitue dans la propoſée les valeurs de y, dy & ddy que donne cette ſuppoſition, il viendra, après les opérations ordinaires, $o = x\,dz\,dx + 2a\,dz\,dx + a\,x\,ddz$, & en diviſant par $a\,x\,dz$, $o = \frac{dx}{a} + \frac{2\,dx}{x} + \frac{ddz}{dz}$, ou $\frac{2\,dx}{x} + \frac{ddz}{dz} = -\frac{dx}{a}$. En intégrant & ajoutant la conſtante $L.B\,dx$, on a $2.L.x + L.dz = L.B\,dx - \frac{x}{a}$, ou

$$L.x^2dz = L.B\,dx - \frac{x}{a}.L.e = L.B\,e^{-\frac{x}{a}}\,dx;$$

$$\text{donc } x^2dz = Be^{-\frac{x}{a}}\,dx;\ dz = \frac{Be^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx} \ldots\ldots (A),$$

& en intégrant encore, $z = B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx}$; donc l'intégrale complette ſera $y = cx + B\,x\,S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}\,dx}{xx}$, qui renferme deux conſtantes arbitraires comme il convient. En général l'intégrale finie & complette d'une équation d'un ordre n doit contenir un nombre n de conſtantes arbitraires : car en ſuppoſant dx conſtant, à chaque intégration que l'on fera, on doit ajouter une conſtante ; donc puiſqu'on doit faire n intégra-

tions, on doit avoir n constantes. On n'a pas ajouté de constante en intégrant l'équation A, parce qu'elle étoit inutile : car si on fait $z = D + B, S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, on aura pour l'intégrale complette $y = cx + Dx + Bx.S. \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, qui se réduira à la forme ci-dessus en faisant $c + D = A'$, & changeant ensuite A' en c.

Si l'on avoit l'équation $aa dy + yy dx = (aa + xx) dx$, en supposant $y = x + z$ & éliminant y & dy, on trouveroit l'équation $aa dz + 2zx dx + zz dx = 0$, qui étant intégrée par la méthode du (n°. 128), donnera $z = \frac{C aa. e^{-\frac{xx}{2a}}}{aa + C. S. e^{-\frac{xx}{2a}} dx}$. Mais, par supposition, $y = x + z$; donc l'intégrale complette sera $y = x + \frac{C aa. e^{-\frac{xx}{2a}}}{aa + C. S. e^{-\frac{xx}{2a}} dx}$. Si on fait $C = 0$, on aura $y = x$, intégrale particuliere de la proposée.

192. Si une valeur particuliere de $y = p$ rend la différentielle $A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C dd y}{dx^2}$ &c.

égale à o, on aura auſſi $y = ap$, a étant une conſtante arbitraire, & en ſubſtituant ap au lieu de y, la différentielle ſera auſſi égale à o; car on aura $A\,ap + \frac{B\,a\,dp}{dx} + \frac{C\,a\,ddp}{dx^2} + \&c. = o$.

Puiſque cette différentielle eſt le produit de a par $A\,p + \frac{B\,dp}{dx} + \frac{C\,ddp}{dx^2} + \&c.$, & qu'on ſuppoſe que cette dernière quantité eſt = o. De même ſi la ſuppoſition de $y = q$, rend la différentielle propoſée = o, en ſubſtituant bq au lieu de y, la différentielle ſera encore = o. Il en ſera de même en ſubſtituant $ap + bq$ au lieu de y: car ſi on a les deux quantités $A\,ap + \frac{B\,a\,dp}{dx} + \frac{C\,a\,ddp}{dx^2} + \&c.$, & $A\,bq + \frac{B\,b\,dq}{dx} + \frac{C\,b\,ddq}{dx^2} + \&c.$ dont chacune eſt = o, leur ſomme ſera auſſi = o; or en ſubſtituant $ap + bq$ au lieu de y, on a la ſomme des quantités précédentes; donc &c. De même ſi p, q, r, s, &c. ſont des valeurs particulieres de y, qui rendent notre différentielle = o, $y = ap + bq + cr + fs + \&c.$ ſera une intégrale de notre différentielle, & ſi notre différentielle eſt du quatrieme ordre ſeulement, l'intégrale $y = ap + bq + cr + fs$, qui contiendra quatre conſtantes indéterminées a, b, c, f, ſera l'intégrale complette & finie de l'équation $o = A\,y + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \frac{E\,d^4y}{dx^4}$.

193. Soit l'équation générale $o = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{N d^n y}{dx^n}$ ..... (H) dans laquelle la différentielle dx & tous les coefficiens A, B, &c. ſont des conſtantes. Si l'on ſuppoſe $y = e^{hx}$, h étant une conſtante & L.$e = 1$, on aura L. $y = hx$, L. $e = hx$, $\frac{dy}{y} = hdx$, $dy = hy dx = h dx e^{hx}$, $\frac{dy}{dx} = h e^{hx}$; & en ſuppoſant dx conſtant on trouvera $\frac{ddy}{dx} = h^2 . e^{hx} dx$, ou $\frac{ddy}{dx^2} = h^2 e^{hx}$. On en aura auſſi $\frac{d^3 y}{dx^3} = h^3 e^{hx}$, & en général $\frac{dy^n}{dx^n} = h^n e^{hx}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation H & diviſant le réſultat par e^{hx}, on aura la transformée (K)..... $o = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 \ldots\ldots + Nh^n$, dont l'inconnue eſt h, & qui eſt du dégré n. Si on ſuppoſe que f eſt une des racines de cette équation de maniere que l'on ait $h = f$, ou que $h - f = o$ ſoit un diviſeur de l'équation K, on aura $y = e^{fx}$, équation intégrale particuliere de la propoſée H; donc, ſelon ce qu'on vient de dire (192), $y = a e^{fx}$ ſera une autre équation intégrale particuliere de la propoſée qui renfermera une conſtante arbitraire a. Si toutes les racines de l'équation K ſont inégales & qu'on les repréſente

par f, f', f'', f''', &c. reſpectivement, l'intégrale complette & finie de la propoſée ſera $y = a\,e^{fx} + b\,e^{f'x} + c\,.\,e^{f''x} +$ &c., a, b, c, &c. étant des conſtantes arbitraires.

Voyons maintenant comment il faut s'y prendre lorſque l'équation K a des racines égales, c'eſt-à-dire, quelque facteur de cette forme $(h - f)^m = 0$. Je remarque d'abord que la relation qu'il y a entre l'équation H & l'équation K eſt telle, que ſi dans la première on écrit h^0 pour y, h pour $\frac{dy}{dx}$, h^2 pour $\frac{ddy}{dx^2}$, & en général h^m pour $\frac{d^m y}{dx^m}$, elle deviendra l'équation K; & que ſi dans celle-ci on écrit y pour h^0, $\frac{dy}{dx}$ pour h, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour h^2, &c. on rétablira l'équation H; d'où l'on conclut que ſi $h - f = 0$, ou $h - f\,h^0 = 0$, eſt un diviſeur de l'équation K, on en pourra tirer l'équation $\frac{dy}{dx} - fy = 0$, ou $\frac{dy}{y} = f\,dx$, dont l'intégrale L. $y = fx$. L. e, ou $y = e^{fx}$ ſera une intégrale particulière de la propoſée. Donc $y = a\,.\,e^{fx}$ ſera auſſi une intégrale de la propoſée, & ſi l'on a le diviſeur double $(h - f)^2 = 0$, ou $ff\,h^0 - 2fh + hh = 0$, on en tirera, par les ſubſtitutions preſcrites, l'équation différentielle (R)..... $ffy - \frac{2f\,dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$.

on cherchera ensuite l'intégrale finie & complette de cette équation, en faisant $y = e^{fx}u$, d'où l'on tire $\frac{dy}{dx} = fe^{fx}u + \frac{e^{fx}du}{dx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = f^2e^{fx}u + \frac{2e^{fx}du}{dx} + \frac{e^{fx}ddu}{dx^2}$. Substituant ces valeurs dans l'équation différentielle R, elle devient en réduisant, $\frac{e^{fx}ddu}{dx^2} = 0$, donc $ddu = 0$; donc en intégrant, $du = bdx$, b étant une constante arbitraire, & en intégrant encore, $u = bx + a$, a étant une autre constante arbitraire. Mais on a supposé $y = e^{fx}u$, donc on aura $y = e^{fx}(a + bx)$, valeur de y qui contient deux constantes arbitraires, & qui répond à deux racines égales de l'équation K. De même si l'équation K a un diviseur triple $(f - h)^3$, en le développant & faisant les substitutions prescrites, on en déduira l'équation $f^3y - \frac{3ffdy}{dx} + \frac{3fddy}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$, qui sera contenue dans la proposée (H), & en supposant $y = e^{fx}u$, on trouvera par substitution, $d^3u = 0$. En intégrant cette équation, il vient $ddu = 2cdx^2$, $2c$ étant une constante arbitraire; en intégrant de nouveau, on a $du = 2cxdx + bdx$, b étant une constante arbitraire; & en intégrant pour la troisième fois, on trouve $u = cx^2 + bx + a$, a étant encore une constante arbitraire. On aura donc $y = e^{fx}(a + bx + cxx)$, valeur de y qui répond à trois racines égales de l'équation K. En général si le diviseur est $(f - h)^m$, on aura $y = e^{fx}(a + bx + cx^2 + Dx^3 +$

$gx^4, \ldots, + kx^{m-1}$), a, b, c, D, g, &c. étant des conſtantes arbitraires; de ſorte que cette valeur renfermera le nombre m de conſtantes arbitraires.

Suppoſons maintenant que l'équation algébrique K renferme des racines imaginaires, nous ſavons que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair: de plus nous avons vu ci-deſſus que les racines imaginaires peuvent être repréſentées par la formule $M + N\sqrt{-1}$, & il eſt évident que ſi l'une des racines imaginaires d'une équation algébrique eſt repréſentée par $a + b\sqrt{-1}$, ſa correſpondante ſera $a - b\sqrt{-1}$, autrement leur produit ne ſauroit être réel. Si on ſuppoſe que V repréſente un arc de cercle dont le rayon ſoit $= 1$, & qu'une des racines imaginaires de l'équation K ſoit $h = m.$ cof. V $+ m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$, ſa correſpodante ſera $= m.$ cof. V $- m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$, donc on aura ($h - m.$ cof. V $- m.$ ſin. V. $\sqrt{-1}$) ($h - m.$ cof. V $+ m.$ ſin. V $\times \sqrt{-1}$) $= hh - 2m.$ cof. V. $h + mm.$ cof.^{2} V $+ mm.$ ſin.^{2} V $= 0$, ou parce que ſin.^{2} V $+$ cof.^{2} V eſt égal au quarré 1 du rayon,) $mmh^\circ - 2mh.$ cof. V $+ hh = 0$, équation qui repréſente un diviſeur réel de la propoſée. Par les ſubſtitutions preſcrites, je réduis ce diviſeur à la forme (P)..... $0 = mmy - 2m. \frac{dy}{dx}$ cof. V $+ \frac{ddy}{dx^2}$. Je cherche maintenant l'intégrale correſpondante en ſuppoſant $y = e^{mx.\text{ cof. V}} u$, d'où l'on tire $dy = m,$ cof. V, $e^{mx.\text{ cof. V}} u dx$ $+$ &c.

$e^{mx.\text{cos. V}}\,du$, & $ddy = mm.(\text{cos. V})^2 \times e^{mx.\text{cos. V}}\,u\,dx^2 + 2m.\text{cos. V}\,e^{mx.\text{cos. V}}\,du\,dx + e^{mx.\text{cos. V}}\,ddu$, l'arc V eſt ſenſé conſtant. Subſtituant ces valeurs de y, dy, ddy dans l'équation P, réduiſant & diviſant par $e^{mx.\text{cos. V}}$, on aura $0 = mmu - mmu.(\text{cos. V})^2 + \frac{ddu}{dx^2}$; ou $mmu\left(1 - (\text{cos. V})^2\right) + \frac{ddu}{dx^2} = 0$, ou (parce que dans un cercle le quarré du ſinus eſt égal au quarré du rayon moins le quarré du coſinus,) $mm.(\text{ſin. V})^2 u + \frac{ddu}{dx^2} = 0$, ou $mm.(\text{ſin. V})^2 u\,dx^2 + ddu = 0$. En multipliant cette équation par $2\,du$, on aura $2mm.(\text{ſin. V})^2 u\,du\,dx^2 + 2\,du\,ddu = 0$, dont l'intégrale (à cauſe de dx conſtant), en ajoutant la conſtante du même ordre $a^2\,mm.(\text{ſin. V})^2.dx^2$, ſera $mm.(\text{ſin. V})^2 uudx^2 + du^2 = a^2 mm.(\text{ſin. V})^2\,dx^2$; d'où l'on tire $\frac{du^2}{aa - uu} = mm.(\text{ſin. V})^2\,dx^2$; donc $\frac{du}{\sqrt{(aa-uu)}} = m.\text{ſin. V}.dx$. Mais $\frac{du}{\sqrt{(aa-uu)}} = \frac{\frac{du}{a}}{\sqrt{\left(1-\frac{uu}{aa}\right)}} = ds$ élément d'un arc de cercle dont le ſinus eſt $\frac{u}{a}$ & le rayon $= 1$; donc $ds = m.\text{ſin. V}.dx$, & $s = mx.\text{ſin. V} + B'$, B' étant

une conſtante arbitraire. Mais on peut prendre la quantité $m\,x.$ ſin. V $+$ B′ pour un arc de cercle dont le ſinus eſt $\frac{u}{a}$; donc on aura $\frac{u}{a} =$ ſin. $(mx.$ſin. V $+$ B′$)$, ou $u = a.$ſin.$(mx.$ſin. V $+$ B′$)$. Subſtituant cette valeur de u dans l'équation $y = e^{mx.\text{ cof. V}}u$, on trouvera $y = a\,e^{mx.\text{ cof. V}} \times$ ſin. $(mx.$ ſin. V $+$ B′$)$, valeur de y correſpondante aux deux racines imaginaires du diviſeur $mm - 2mh.$ cof. V $+ hh = 0$, & qui contient deux conſtantes arbitraires a &. B′.

Suppoſons maintenant que l'équation K ait des racines imaginaires égales entr'elles, c'eſt-à-dire, ait pour diviſeur le quarré, le cube, ou une puiſſance k du facteur $mm - 2mh.$ cof. V $+ hh$; on aura $mm - 2mh.$ cof. V $+ hh = (h - m.$ cof. V $+ m.$ ſin. V$\sqrt{-1})$ $(h - m.$ cof. V $- m.$ ſin. V$\sqrt{-1})$. Mais ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, à la valeur de $h = f$, ou au diviſeur $h - f = 0$ de l'équation K répond $y = e^{fx}a$, au diviſeur $(h - f)^m$ répond $y = e^{fx}(a + bx + cx^2$ &c.$)$; donc ſi on fait ſucceſſivement f (qui eſt $= h$) $= m.$ cof. V $- m.$ ſin. V.$\sqrt{-1}$, & $f = m.$ cof. V $+$ $m.$ ſin. V.$\sqrt{-1}$, le diviſeur $h - m.$ cof. V $-$ $m.$ ſin. V.$\sqrt{-1}$, donnera la variable $y = a\,e^{mx.\text{cof. V} + mx.\text{ſin. V}\sqrt{(-1)}}$, & le diviſeur ſimple correſpondant $h - m.$ cof. V $+ m.$ ſin. V.$\sqrt{-1}$, donnera $y = a'\,e^{mx.\text{ cof. V} - mx.\text{ ſin. V.}\sqrt{-1}}$,

le produit $mm - 2hm.\text{cos.}V + hh$ de ces diviſeurs donnant $y = ae^{mx.\text{cos.}V.+mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}} + a'e^{mx.\text{cos.}V-mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}}$, ſomme des deux valeurs de y correſpondante à deux diviſeurs imaginaires. Mais on a vu ci-deſſus que le diviſeur $mm - 2mh.\text{cos.}V + hh = 0$, donne $y = ae^{mx.\text{cos.}V}.\text{Sin.}(mx.\text{ſin.}V + B')$; donc $ae^{mx.\text{cos.}V}.\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B') = e^{mx.\text{cos.}V}\left(ae^{mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{ſin.}V.\sqrt{-1}}\right)$; donc en diviſant par $e^{mx.\text{cos.}V}$, on aura $a.\text{ſin.}(mx\,\text{ſin.}V + B') = ae^{mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}}$, & en multipliant de part & d'autre par x^k, on trouve $ax^k\,\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B') = ax^k e^{mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}} + a'x^k e^{-mx.\text{ſin.}V\sqrt{-1}}$.

Suppoſons préſentement que le quarré $(mm - 2mh.\text{cos.}V + hh)^2 = (h - m.\text{cos.}V - m.\text{ſin.}V\sqrt{-1})^2\,(h - m.\text{cos.}V + m.\text{ſin.}V\sqrt{-1})^2$, ſoit un diviſeur de l'équation K, on fera $f = m.\text{cos.}V. + m.\text{ſin.}V.\sqrt{-1}$, & enſuite $f = m.\text{cos.}V - m.\text{ſin.}V.\sqrt{-1}$. Donc parce que le facteur $(h - f)^2$ donne $y = e^{fx}(a + bx)$,

le facteur $(h - m.\text{cos. V} - m.\text{ sin V}\sqrt{-1})^2$, donnera $y = e^{mx.\text{cos. V}} + mx\text{ sin. V}.\sqrt{(-1)} \times (a+bx)$, le facteur $(h - m.\text{cos. V} + m.\text{sin. V}\sqrt{-1})^2$, donnant $y = e^{mx.\text{cos. V} - mx.\text{sin. V}\sqrt{-1}}(a^1 + b^1x)$; donc la valeur de y correspondante au facteur $(mm - 2mh.\text{cos. V} + hh)^2$ sera $y = e^{mx.\text{cos. V}} \times \left(a\, e^{mx.\text{ sin. V}.\sqrt{-1}} + a^1\, e^{-mx.\text{ sin. V}.\sqrt{-1}}\right) + e^{mx.\text{ cos. V}} \left(b\, x\, e^{mx.\text{ sin. V}.\sqrt{-1}} + b^1 x\, e^{-mx.\text{ sin V}\sqrt{-1}}\right)$. Mais, selon ce qu'on a dit ci-dessus, $ae^{mx\text{ sin.V}\sqrt{-1}} + a'e^{-mx.\text{sin V}.\sqrt{-1}} = a\,\text{sin.}(mx.\text{ sin. V} + B^1)$ *, a & B^1 étant des constantes arbitraires. Par la même raison on aura $bxe^{mx.\text{ sin. V}\sqrt{-1}} + b^1 x\, e^{-mx.\text{ sin. V}\sqrt{-1}} = bx\,\text{sin.}(mx.\text{ sin. V} + B^{11})$, b & B^{11} étant des constantes arbitraires. Donc la valeur de y qui répond au diviseur $(mm - 2mh.\text{ cos. V} + hh)^2$ sera $y = e^{mx.\text{ cos. V}}\left(a\,\text{sin.}(mx.\text{ sin. V} + B^1) + bx.\text{ sin.}(mx.\text{ sin. V} + B^{11})\right)$, qui renferme quatre

* Dans le second membre de cette équation on a représenté $a + a^1$ par a, dans le second membre de l'équation suivante b représente la valeur de $b + b^1$ qui se trouve dans le premier membre.

conſtantes arbitraires, a, b, B', B''. On trouvera de même que la valeur de y, qui répond au diviſeur cube $(mm - 2mh.\text{cof. V} + hh)^3$, eſt $y = e^{mx.\text{cof. V}}(a.\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B') + bx.\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B'') + cx\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B'''))$ qui renferme ſix conſtantes arbitraires; & en général, comme au diviſeur $(h - f)^k$ répond $y = e^{fx}(a + bx + cx^2 \ldots + Nx^{k-1})$, au diviſeur $(mm - 2mh.\text{cof. V} + hh)^k$ répondra $y = e^{mx.\text{cof. V}}(a.\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B') + bx.\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B'') + cxx\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + B''') + \&c. \ldots + N'x^{k-1}\text{ ſin. }(mx.\text{ ſin. V} + C'))$ qui renfermera un nombre $2k$ de conſtantes arbitraires, a, b, c, &c. B', B'', B''', &c. N' & C'.

194. PROBLEME. *Trouver l'intégrale complette & finie de l'équation* (H) .... $o = Ay + B\frac{dy}{dx} + C.\frac{ddy}{dx^2} + \&c. \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n}$, *dans laquelle la différence* dx *eſt conſtante, & les coefficiens* A, B, &c. *ſont des conſtantes, ou* o. On écrira dans la propoſée h^0, au lieu de y, h au lieu de $\frac{dy}{dx}$, h^2 au lieu de $\frac{ddy}{dx^2}$, & généralement h^k au

lieu de $\frac{d^k y}{dx^k}$, & on formera l'équation (K), ou $o = A h^0 + B h + C h^2 \ldots + N h^n$, du dégré n; on décomposera cette équation en facteurs réels $h - f = o$, $(h - f)^k = o$. On cherchera auſſi les facteurs imaginaires, qui, pris deux à deux, donneront un facteur de la forme $hh - 2mh.\text{cos.}V + mm = o$, & s'il y a des racines imaginaires égales, on aura quelque facteur de la forme $(hh - 2mh.\text{cos.}V + mm)^k = o$. Chaque facteur ſimple qui n'a point d'autre facteur égal, donnera $v = ae^{fx}$; mais chaque facteur compoſé de facteurs ſimples égaux entr'eux, comme $(h-f)^k = o$, donnera $e^{fx}(a + bx + cx^2 + \&c.... + N'x^{k-1})$. Chaque facteur $hh - 2mh.\text{cos.}V + mm = o$, de deux dimenſions qui n'a point d'autre facteur égal, donnera $y = e^{mx.\text{cos.}V}\left(a.\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B')\right)$; chaque facteur, compoſé de pluſieurs facteurs de deux dimenſions égaux entr'eux, comme $(hh - 2mh.\text{cos.}V + mm)^k = o$, donnera $y = e^{mx.\text{cos.}V}\left[a.\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B') + bx.\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B'') + cx^2\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + B''') + \&c..... + N''x^{k-1}\text{ſin.}(mx.\text{ſin.}V + N''')\right]$. a, b, &c. B', B'', &c. N''' étant des conſtantes arbitraires, V étant l'arc d'un cercle

dont le rayon = 1, & mx sin. V + B', mx. sin. V + B'', &c. étant aussi des arcs pris dans le même cercle dont le rayon = 1. On fera la somme de toutes ces valeurs particulières de y, & formant une équation dont un des membres soit cette somme, & dont l'autre membre soit y, cette équation sera l'intégrale complette réelle & finie de l'équation proposée (H), cela suit évidemment de ce qu'on vient de dire (193).

REMARQUE. Si l'on avoit deux facteurs $h - f = 0$, $h - f' = 0$, simples & inégaux, le premier donneroit $y = e^{fx} a$, le second $y = e^{fx} a'$, &c. ce que nous faisons remarquer, afin qu'on ne s'imagine par que la constante a, qui répond à un diviseur simple, soit la même que celle qui répond à un autre diviseur simple qui n'est pas égal au premier, & l'on doit faire un raisonnement semblable pour les diviseurs multiples de la forme $(h - f)^k = 0$, & pour les diviseurs de deux dimensions, soit qu'ils en ayent d'autres qui leur soient égaux ou non.

EXEMPLE I. Trouver l'intégrale complette & finie de l'équation différentielle du troisième ordre, $o = y - \frac{3g^2 dd y}{dx^2} + \frac{2g^3 d^3 y}{dx^3}$. Par les substitutions prescrites, on aura $o = h^0 - 3g^2 h^2 + 2g^3 h^3$, ou en divisant par $2g^3$, & faisant attention que $h^0 = 1$, $h^3 - \frac{3h^2}{2g} + \frac{1}{2g^3} = 0$. Cette équation se résout en deux facteurs h

$+\frac{g}{2}=0$, & $\left(h-\frac{1}{g}\right)^2=0$. Le premier facteur étant comparé avec le facteur $h-f=0$, donne $f=-\frac{1}{2g}$, & $y=ae^{fx}=ae^{-\frac{x}{2g}}$. L'autre facteur étant comparé avec la formule $(h-f)^2=0$, donne $f=\frac{1}{a}$, & $y=e^{\frac{x}{g}}(a'+bx)$. Donc l'intégrale complette sera $y=ae^{-\frac{x}{2g}}+e^{\frac{x}{g}}(a'+bx)$.

REMARQUE. Si la conſtante a ſe trouvoit dans l'équation différentielle propoſée, pour plus de clarté on n'emploieroit pas la lettre a comme conſtante arbitraire, dans l'intégrale.

EXEMPLE II. Intégrer l'équation différentielle du quatrième ordre $o=y-\frac{a^4d^4y}{dx^4}$. On formera, par ſubſtitution, l'équation $o=1-a^4h^4$, ou en changeant les ſignes & diviſant, $o=h^4-\frac{1}{a^4}=\left(h-\frac{1}{a}\right)\times\left(h+\frac{1}{a}\right)\left(h^2+\frac{1}{aa}\right)$, le facteur $h-\frac{1}{a}=0$; donne $y=a'e^{\frac{x}{a}}$, le facteur $h+\frac{1}{a}=0$; donne $y=a''e^{-\frac{x}{a}}$, & les deux enſemble donnent $y=a'e^{\frac{x}{a}}+a''e^{-\frac{x}{a}}$. Le facteur $hh+\frac{1}{aa}=0$, qui renferme deux racines imaginaires $\frac{1}{a}\sqrt{-1}$ & $-\frac{1}{a}\sqrt{-1}$, étant comparé à la formule $hh-2mh\,\text{cof. V}+mm=0$, donne $m=\frac{1}{a}$, & cof. V $=0$; d'où l'on tire ſin. V $=1$. Car ſin. V $=\sqrt{\left(1-(\text{cof. V})^2\right)}$; mais

mais la formule $hh - 2mh$ cos. V. $+ mm = 0$, donne $y = e^{mx \text{ cos. V}} a''' \text{ sin. } (mx \text{ sin. V} + B')$, en regardant a''' comme une constante indéterminée. De plus à cause de cos. V $= 0$, l'on a mx cos. V $= 0$, & $e^{mx \text{ cos. V}} = e^{0} = 1$; donc $y = a''' \text{ sin. } \left(\frac{x}{a} + B'\right)$; donc l'intégrale complette cherchée sera $y = a' e^{\frac{x}{a}} + b e^{-\frac{x}{a}} + a''' \text{ sin. } \left(\frac{x}{a} + B'\right)$.

EXEMPLE III. Intégrer l'équation $0 = y + \frac{a^4 d^4 y}{dx^4}$. L'équation qui en résulte par les substitutions est $0 = 1 + a^4 h^4$; d'où l'on tire $0 = h^4 + \frac{1}{a^4} = \left(h^2 + \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right) \times \left(hh - \frac{h\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{aa}\right)$. En comparant chacun de ces facteurs à la formule $hh - 2mh$ cos. V $+ mm = 0$, on trouve pour tous les deux $mm = \frac{1}{aa}$, & $m = \frac{1}{a}$. On trouve de plus pour le premier, $-2m$ cos. V $= \frac{\sqrt{2}}{a}$; donc m cos. V $= -\frac{\sqrt{2}}{2a} = -\frac{1}{a\sqrt{2}}$, & pour le second m cos. V $= \frac{1}{a\sqrt{2}}$, & par conséquent pour tous les deux m sin. V $= \frac{1}{a\sqrt{2}}$ *. Donc l'intégrale complette cher-

* Car à cause de $(\text{sin. V})^2 = 1 - (\text{cos. V})^2$, on a $(\text{sin. V})^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ & sin. V $= \frac{1}{\sqrt{2}}$:

chée ſera $y = a' e^{-\frac{x}{a\sqrt{2}}} \text{ ſin.} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B'\right) + b e^{\frac{x}{a\sqrt{2}}} \text{ ſin.} \left(\frac{x}{a\sqrt{2}} + B''\right)$.

EXEMPLE IV. Trouver l'intégrale finie & complette de l'équation différentielle d'un ordre quelconque $o = \frac{d^n y}{dx^n}$. L'équation qui en réſulte par les ſubſtitutions eſt $o = h^n$, dont toutes les racines ſont égales entre elles; en la comparant avec la formule $(h-f)^k = o$, on trouve $k = n$, & $f = o$, par conſéquent $e^{fx} = e^o = 1$, & l'intégrale complette ſera $y = e^{fx} \times \left(a + bx + cx^2 + \text{&c.} \ldots\ldots + N' x^{n-1}\right) = \left(a + bx + \text{&c.} \ldots\ldots + N' x^{n-1}\right)$.

REMARQUE. Suppoſons qu'on prenne les facteurs $h + 1 = o$, $hh + h + 1 = o$, $(hh - h + 1)^2 = o$, & qu'on faſſe leur produit $= o$, on aura $o = 1 + hh + h^3 + h^4 + h^5 + h^7$. Subſtituant dans cette équation y pour $1 = h^o$, $\frac{ddy}{dx^2}$ pour h^2, &c., on formera l'équation différentielle du ſeptième ordre $o = y + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^7 y}{dx^7}$. On trou-

---

car puiſque $m = \frac{1}{a}$ & que m cof. $V = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$, on aura cof. $V = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, & $(\text{cof. } V)^2 = \frac{1}{2}$.

vera l'intégrale complette & finie de cette équation en cherchant les valeurs de y qui répondent à chacun des facteurs qu'on a choisis & en égalant à y la somme de ces valeurs. Le premier facteur $h+1=0$, donnera $y = ae^{-x}$; le facteur $hh+h+1=0$ donnera $y = a'e^{-\frac{x}{2}} \text{ fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'\right)$, le troisième facteur $(hh-h+1)^2=0$ donne $y = a''e^{\frac{x}{2}} \text{ fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B''\right) + bxe^{\frac{x}{2}} \text{ fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'''\right)$; donc l'intégrale complette sera $y = ae^{-x}+a'e^{-\frac{x}{2}} \text{ fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'\right)+a''e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B''\right)+bxe^{\frac{x}{2}} \text{ fin.}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+B'''\right)$.

On peut aussi prendre h, ou h^k pour un des facteurs & comparant h^k avec $(h-f)^k=0$, on aura $f=0$ & $y=a+bx+cx^2+$ &c. S'il n'y a qu'un seul facteur h, la valeur correspondante de y sera $y=ae^{fx}=ae^0=a$. L'on peut donc, par ce moyen, construire une table générale des différentielles de tous les ordres de la forme H & de leurs intégrales respectives, & cela en prenant des facteurs convenables pour former l'équation K.

195. PROBLEME. *L'équation $y=p$ fonction de x étant une intégrale particuliere de l'équation* $0=Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cddy}{dx^2}$, *dans laquelle dx est constant &*

les quantités A, B, C *ſont des fonctions de* x, *trouver l'intégrale complette de cette équation.* En diviſant la propoſée par C, & faiſant $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = P'$, on aura $o = Py + \frac{P'dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$, équation que j'appelle (F), dans laquelle P & P' ſont des fonctions de x. Mais, par ſuppoſition, $y = p$; donc $dy = dp$ & $ddy = ddp$; donc notre équation ſera $Pp + \frac{P'dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = o$. Suppoſons maintenant que $y = pz$ ſoit une intégrale particuliere de l'équation propoſée, on aura $dy = pdz + zdp$, $ddy = pddz + 2dpdz + zddp$. Subſtituant ces valeurs de dy & de ddy dans l'équation F, elle deviendra $Ppz + \frac{P'zdp}{dx} + \frac{P'pdz}{dx} + \frac{zddp}{dx^2} + \frac{2dpdz}{dx^2} + \frac{pddz}{dx^2} = o$, équation que j'appelle (N). Mais on vient de trouver $Pp + \frac{P'dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} = o$; ainſi en ſupprimant dans l'équation N le premier, le ſecond & le quatrième termes dont la ſomme $= o$ eſt multipliée par z, il viendra $\frac{P'pdz}{dx} + \frac{2dpdz}{dx^2} + \frac{pddz}{dx^2} = o$. Multipliant cette équation par $\frac{dx^2}{pdz}$, on aura (A).... $P'dx + \frac{2dp}{p} + \frac{ddz}{dz} = o$. L'intégrale de cette quantité différentielle eſt S. $P'dx + 2L.p + L.dz = S.P'dx \times L.e + L.p^2dz = L.e^{S.P'dx} p^2dz$, en ſuppoſant $L.e = 1$. Egalant cette intégrale à une conſtante arbitraire du même ordre L. bdx, on aura $e^{S.P'dx} p^2dz = bdx$, intégrale complette de l'équation A. De-là on

tire $dz = \frac{b\,dx\,e^{-S.P'dx}}{p^2}$, & $z = bS.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{p^2}$; donc $y = pz = bpS.\frac{e^{-S\,P'dx}\,dx}{p^2}$ sera une autre intégrale particuliere de l'équation proposée, & en supposant que a' soit une constante arbitraire, on aura $y = a'p + bpS.\frac{e^{-S.P'dx}\,dx}{p^2}$ pour l'intégrale complette & finie de la proposée.

COROLLAIRE. Si dans l'équation F on a $P = \frac{-P'q-r}{p}$, en supposant que q est $= \frac{dp}{dx}$ & $r = \frac{dq}{dx}$, l'équation $y = p$ fonction de x, sera une intégrale particuliere de la proposée, dont l'intégrale complette sera $y = a'p + bp.S.\frac{e^{-S.P'dx}dx}{pp}$..... (B) ; car en substituant la valeur de P dont nous venons de parler dans l'équation F, la proposée deviendra (M)..... $-y.\frac{P'q+r}{p} + \frac{P'dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$. Mais la supposition de $y = p$ donne $dy = dp$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} = q$, $\frac{ddy}{dx} = dq$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$; donc en substituant ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$ dans l'équation M, on aura en ôtant la fraction, $-P'q - r + P'q + r = 0$, équation identique ; donc $y = p$ sera une intégrale particuliere de la proposée, & l'équation B qui renferme deux constantes arbitraires en sera l'intégrale complette. Si on suppose $p = x^m$, & qu'on substitue dans l'équation M les valeurs de p, q, r que donne cette supposition, elle de-

viendra $-y.\left(\frac{m\,P'\,x^{m-1}+m.(m-1).x^{m-2}}{x^m}\right)$ $+\frac{P'dy}{dx}+\frac{d\,dy}{dx^2}=0$, ou (R) ....$-my.\frac{P'x+m-1}{xx}+\frac{P'dy}{dx}+\frac{d\,dy}{dx^2}=0$, dont l'intégrale complette ſera $y=a'x^m+bx^m.S.\frac{e^{-S.P'dx}\,dx}{x^{2m}}$. Si on ſuppoſe de plus que $P'=ax^n$, on aura $S.P'dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}$; donc notre intégrale complette deviendra $y=a'x^m+bx^m\,S.\frac{e^{\frac{-ax^{n+1}}{n+1}}\,dx}{x^{2m}}$, équation que j'appelle (T). On trouvera, par la même méthode, qu'en faiſant $p=ax^m+b'x^n+cx^h$ &c., l'intégrale complette & finie de la propoſée ſera $y=a'(ax^m+b'x^n+cx^h+$ &c.$)+b(ax^m+b'x^n+cx^h+$ &c.$)\times S.\frac{e^{-S.P'dx}\,dx}{(ax^m+b'x^n+cx^h+\&c.)^2}$, a' & b étant des conſtantes arbitraires.

Soit propoſée l'équation du ſecond ordre $ddy+ax^2dy\,dx-axy\,dx^2=0$, je lui donne la forme $-ayx+\frac{ax^2dy}{dx}+\frac{d\,dy}{dx^2}=0$. En la comparant à la formule R, je trouve $m=1$, $P'=ax^2$; donc ſi à la place de m & de ax^n, on ſubſtitue 1 & ax^2 dans l'intégrale T, on aura $y=a'x+bx\,S.\frac{e^{-\frac{1}{3}ax^3}\,dx}{x^2}$.

196. PROBLÈME. *Trouver l'intégrale complette de l'équation* $o = Py + \frac{P'dx}{dy} + \frac{ddy}{dx^2}$, *en la réduisant d'abord au premier ordre.* En supposant $y = e^{S.\zeta dx}$, on réduira la proposée à l'équation suivante $o = P + P'\zeta + \zeta\zeta + \frac{d\zeta}{dx}$, ou $o = Pdx + P'\zeta dx + \zeta\zeta dx + d\zeta$ qui est du premier ordre & ne contient que deux variables x & ζ, puisque P & P' sont supposés des fonctions de x. On cherchera par les méthodes précédentes, l'intégrale de cette équation. Supposant cette intégrale connue, on aura la valeur de ζ en x, ou $\zeta = k$ fonction de x. Cela posé on pourra toujours avoir, au moins par approximation, l'intégrale de ζdx; donc on trouvera l'intégrale S. kdx qui sera $=$ S. ζdx, fonction de x; & parce que $y = e^{S.\zeta dx}$, on aura en faisant $e^{S.\zeta dx} = p$, $y =$ p fonction de x, équation qui sera une intégrale particuliere de la proposée. Donc on trouvera par le problême précédent l'intégrale finie & complette de la proposée; de sorte que l'on aura $y = ap + bp$ S. $\frac{e^{-S.P'dx}\,dx}{p^2}$.

197. PROBLÈME. *L'intégrale de l'équation de trois termes* $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = o$, *équation que j'appelle* (A) *étant donnée, trouver l'intégrale de l'équation de quatre termes* (B).... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = o$, dx *étant constant*, P, Q, R *étant des fonctions de* x *& de constantes.* Supposons, 1°. que l'équation $u = t$, fonction de x soit l'intégrale de l'équation A, prenez la différentielle dt & divisez-la par dx pour avoir $\frac{dt}{dx} = t'$, autre fonction de x. 2°. Cherchez, par la méthode ci-dessus (128), l'intégrale de l'équation $dr - \frac{rQtdx}{t'} - \frac{Rtdx}{t'} = o$, dans laquelle

$\frac{Qt}{\zeta^t}$, $\frac{Rt}{\zeta^t}$ ſont des fonctions de x qu'on eſt cenſé connoître; & ſuppoſant que cette intégrale eſt $r=m$, fonction de x, prenez la différentielle de m, & diviſez-la par dx pour avoir $\frac{dm}{dx}=n$, autre fonction de x. 3°. Cherchez (par le N°. 128) l'intégrale de l'équation $d\zeta - \frac{\zeta t^l}{t} - ndx=0$, & ſuppoſant que cette intégrale ſoit $\zeta=k$, fonction de x, on aura $y=m-k$ pour l'intégrale de l'équation B. En effet ſi l'on ſuppoſe $dy+T\zeta dx=0$, T & ζ étant deux variables, on aura $dy=-T\zeta dx$ & $ddy=-Td\zeta dx-\zeta dTdx$; donc l'équation B deviendra par ſubſtitution, $-\frac{Td\zeta}{dx}-\frac{\zeta dT}{dx}-\zeta PT+Qy+R=0$, & en multipliant par $\frac{dx}{T}$, changeant les ſignes & ajoutant l'équation $dy+\zeta Tdx=0$, on aura l'équation (H)..... $dy+d\zeta+\left(\zeta T+\zeta P+\frac{\zeta dT}{Tdx}-\frac{Qy}{T}\right)dx-\frac{Rdx}{T}=0$: cette équation H ſeroit intégrable ſi on pouvoit lui donner la forme (M).... $dy+d\zeta+(y+\zeta)Vdx-\frac{Rdx}{T}=0$, ſuppoſé que V & T ſoient des fonctions connues de x: car en faiſant $r=y+\zeta$, on auroit $dr=dy+d\zeta$, & l'équation M deviendroit $dr+rVdx-\frac{Rdx}{T}=0$, dont on trouveroit l'intégrale $r=m$, fonction connue de x (par le N°. 128); & en différenciant, on auroit $dr=dy+d\zeta=dm=ndx$; donc $dy=ndx-d\zeta$, n étant une fonction connue de x. Subſtituant cette valeur de dy dans l'équation $dy+\zeta Tdx=0$, on auroit en changeant les ſignes, $d\zeta-\zeta Tdx-ndx=0$, dont on trouveroit l'intégrale $\zeta=k$, fonction connue de x (par le N°. 128). Mais on a $r=y+\zeta$; donc $y=r-\zeta$; donc en ſubſti-

tuant les valeurs de r & de ζ, on aura $y = m - k$, intégrale cherchée de l'équation (B). Il ne s'agit donc plus que de réduire l'équation (H) à la forme M; ce qu'on fera en ſuppoſant $\left(T + P + \frac{dT}{T\,dx}\right)\zeta - \frac{Qy}{T} = V(\zeta + y)$, ou (N).... $T + P + \frac{dT}{T\,dx} = -\frac{Q}{T}$, équation d'où l'on tire, en ôtant les fractions & tranſpoſant, $Q\,dx + T^2\,dx + P\,T\,dx + dT = 0$. Si on ſuppoſe maintenant $u = e^{S.t''\,dx}$, t'' étant une nouvelle variable, & $L.e = 1$, on aura, en ſuppoſant toujours dx conſtant, $du = e^{S.t''\,dx}\,t''\,dx$, $ddu = e^{S.t''\,dx}\,dt''\,dx + e^{S.t''\,dx}\,t''t''\,dx^2$. Donc en ſubſtituant, l'équation A deviendra $e^{S.t''\,dx}\frac{dt''}{dx} + e^{S.t''\,dx}\,t''t'' + P\,e^{S.t''dx}\,t'' + Q\,e^{S.t''\,dx} = 0$. Si l'on multiplie cette équation par dx, qu'on la diviſe par $e^{S.t''\,dx}$ & qu'on faſſe $t'' = T$, on aura l'équation $Q\,dx + T^2\,dx + P\,T\,dx + dT = 0$, que nous avons trouvée ci-deſſus; donc la valeur de T que donnera cette équation peut être ſubſtituée à la place de t'' dans l'équation $u = e^{S.t''\,dx}$; c'eſt-à-dire, qu'on peut regarder t'' & T comme repréſentant la même fonction de x.

Pour avoir la valeur de T, je remarque qu'on a les équations $T = t''$, $u = 1$, $u = e^{S.t''\,dx}$; donc $1 = e^{S.t''\,dx}$, $L.1 = L.e^{S.t''\,dx} = S.t''\,dx \times L.e = S.t''dx$, & en différentiant, $\frac{dt}{t} = t''\,dx = T\,dx$. Mais on ſuppoſe ici $dt = t'\,dx$; donc $\frac{t'\,dx}{t} = T\,dx$, ou $T =$

$\frac{t'}{t}$, fonction connue de x, & puisque $V = -\frac{Q}{T}$ (ce qu'on tire aisément de l'équation N), on aura $V = -\frac{Qt}{t'}$, fonction connue de x; donc l'équation $dr + rV\,dx - \frac{R\,dx}{T} = o$, deviendra $dr - \frac{rQt\,dx}{t'} - \frac{Rt\,dx}{t'} = o$, comme nous l'avons mise dans la solution, & son intégrale sera $r = m$, fonction connue de x; donc l'intégrale de l'équation B sera $y = m - k$.

COROLLAIRE. Donc pour intégrer l'équation B, on n'a qu'à retrancher le terme R & substituer u pour y, du pour dy & ddu pour ddy pour avoir l'équation $\frac{ddu}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = o$. On cherchera l'intégrale de cette équation par les méthodes précédentes, ensuite on trouvera l'intégrale de l'équation B par le présent problême.

198. PROBLEME. *Une intégrale particulière de l'équation différentielle de trois termes* $Au + \frac{B\,du}{dx} + \frac{C\,ddu}{dx^2} = o$, *étant donnée, trouver l'intégrale complette de l'équation de quatre termes* $Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} = K$, *ou de l'équation* $D + Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,ddy}{dx^2} = o$, *en faisant* $-K = D$, dx *étant constant, &* A, B, C, D *des fonctions de* x. Divisez les équations proposées par C pour leur donner les formes (A)... $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{P\,du}{dx} + Qu = o$, & (B).... $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{P\,dy}{dx} + Qy + R = o$. Maintenant l'intégrale particulière de l'équation A étant supposée $u = mt$, fonction de x, cherchez (par le N°. 195), une autre intégrale particulière de la même équation qui sera

$u = n$, fonction de x. Cherchez enſuite par le problême précédent les deux intégrales particulières correſpondantes de l'équation B, & ſuppoſant que ces intégrales ſoient repréſentées par $y = p$ & $y = q$, p & q étant des fonctions de x ; l'intégrale complette de l'équation B ſera $y = ap + bq$, a & b étant des conſtantes arbitraires : car puiſque $y = p$ & $y = q$, $y = ap$, & $y = bq$ ſeront des intégrales particulières de l'équation B, & $y = ap + bq$ en ſera l'intégrale complette, ce qu'on prouvera par la méthode ci-deſſus (194.).

REMARQUE. On voit, par les deux problêmes précédens, que ſi l'on a une équation à trois termes de la forme A, dont l'intégrale ſoit donnée, on pourra toujours trouver l'intégrale de l'équation B de quatre termes, c'eſt-à-dire que ſi l'on ſuppoſe $R = o$, & qu'on trouve l'intégrale de $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{P dy}{dx} + Qy + R = o$, on trouvera auſſi l'intégrale en ſuppoſant R une fonction de x. Cette méthode ſeroit applicable aux équations du 3e, 4e, &c. ordre. Et en général ſi l'on a l'équation $Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2}$ &c. . . . . $+ \frac{M d^m y}{dx^m} = \pm R$, dx étant conſtant & les quantités A, B, C. . . . M, R étant des fonctions de x, ſi on trouve l'intégrale d'un ordre quelconque de cette équation en ſuppoſant $R = o$, on pourra trouver l'intégrale du même ordre en ſuppoſant que R eſt une fonction de x.

Ils ne ſera pas inutile de faire obſerver qu'on peut ſouvent intégrer facilement une équation donnée en l'élevant à un ordre ſupérieur. Ainſi en différenciant l'équation (A)..... $8\,dx^2 + 2\,ydd y - dy^2 + 4yy dx^2 = o$, on aura (B)..... $d^3 y - 4\,dy dx^2 = o$, équation dont une intégrale particulière ſera $y = e^{fx}$. En faiſant $f = o$, on a $y = e^o = 1$; les équations $y = 2e^{2x}$, $y = -2e^{-2x}$, ſeront encore des intégrales particulières de la même équation. Multipliant e^o par α, $2e^{2x}$ par

$\frac{b}{2}$, $-2e^{-2x}$ par $-\frac{c}{2}$, on aura $y = a + be^{2x} + ce^{-2x}$ pour l'intégrale finie & complette de l'équation B, a, b & c, étant trois constantes arbitraires. Cette intégrale contient l'intégrale de l'équation (A) qui est d'un ordre moins élevé, comme un cas particulier : car l'intégrale de l'équation A ne peut contenir que deux constantes arbitraires. Si on différencie donc notre intégrale deux fois & qu'on substitue dans l'équation A les valeurs de y, dy & ddy, il faudra que le résultat satisfasse à l'équation A, ce qu'on obtiendra en comparant les constantes; ainsi dans le cas présent on trouvera $c = \frac{aa-2}{4b}$, & l'intégrale complette de l'équation A sera $y = a + be^{2x} + \frac{aa-2}{4b}.e^{-2x}$. On pourra aussi en différenciant une équation donnée, une, deux, &c. fois, parvenir souvent à une équation d'un ordre supérieur de la forme de celles que nous avons déja intégrées, & on aura par-là l'intégrale cherchée.

DE QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRER CERTAINES EQUATIONS.

199. Soit une équation formée de tant de termes qu'on voudra de cette forme $ay^n dy^m ddy^p dx^q$ dans lesquels a, n, m, p, q sont constans, & $m + 2p + q$ constant; je dis que si $n + m + p$ est aussi constant, l'équation sera intégrable : on suppose $m + 2p + q$ constant afin que les quantités infiniment petites soient du même ordre. Maintenant si $n + m + p$ est constant, on aura, en faisant $y = e^{S.t\,dx}$, une équation d'où les exponentielles disparoîtront, & qui, ne contenant que t, dt & dx, pourra s'intégrer par les méthodes connues (on suppose dx constant. Cette méthode est du célèbre M. d'Alembert.

Soit l'équation du premier ordre & dont parle M. le Marquis de Condorcet dans le quatrième volume des Mémoires de l'Académie de Turin, $4x^3dy - 2x^2ydy - 2x^2ydx + xy^2dx + xy^2dy - 2y^3dx - x^2dx - x^2dy + 3xydx + xydy - 2yydx = 0$. Si on le met ſous cette forme $A\,dx + B\,dy = 0$, on trouvera qu'en la multipliant par un facteur $M = \frac{1}{\sqrt{(x-y).xxyy + xxy - x^3}}$, elle devient intégrable: car alors $\frac{(d.AM)}{dy} = \frac{(d.BM)}{dx}$, & l'intégrale cherchée eſt $= L.\left[y - \sqrt{(x-y)}\right] - L.\left[y + \sqrt{(x-y)}\right] - \frac{\sqrt{(x-y)}}{x} = C.$

Soit l'équation $2aydy - 4ady^2 - y^3dx^2(1+xx)^{-\frac{3}{2}} = 0$. Je la multiplie par le facteur $M = \frac{1}{y^3}$ pour avoir $\frac{2aydy - 4ady^2}{y^3} - \frac{dx^2}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = 0$, dont l'intégrale en ajoutant la conſtante $A\,dx$, eſt $\frac{2a\,dy}{yy} - \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} = A\,dx$; & en intégrant de nouveau, on aura $-\frac{2a}{y} - \sqrt{(1+xx)} = Ax + B$.

200. Soit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$....(A), je fais diſparoître les fractions pour avoir $dx\sqrt{(1-yy)} = dy\sqrt{(1-xx)}$, & en intégrant par parties, il vient $x\sqrt{(1-yy)} + S.\frac{xy\,dy}{\sqrt{(1-yy)}} = y\sqrt{(1-xx)} +$

S. $\frac{y\,x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}+C$ *. Mais l'équation A étant multipliée par xy & enſuite intégrée, donne S. $\frac{xy\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=$ S. $\frac{xy\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$; donc l'équation précédente, en effaçant les quantités égales qui ſe trouvent dans les deux membres, deviendra $x\sqrt{(1-yy)}=y\sqrt{(1-xx)}+C$; équation algébrique qui donne l'intégrale complette de la propoſée.

Si l'on avoit l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$. . . . . (B), en ôtant les fractions & prenant enſuite l'intégrale par parties, on trouveroit $x\sqrt{(a+by+cyy)}-$ S. $\frac{(b+2cy)x\,dy}{2\sqrt{(a+by+cyy)}}=y\sqrt{(a+bx+cxx)}-$ S. $\frac{(b+2cx).y\,dx}{2\sqrt{(a+bx+cxx)}}+C$. . . (H). Si l'on multiplie l'équation B par xy, on aura en intégrant, S. $\frac{xy\,dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=$ S. $\frac{xy\,dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$. Mais ſi, avant d'intégrer on multiplie par y, on trouvera S. $\frac{y\,dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}=$

* Si l'on fait attention que S. $p\,dx=px-$ S. $x\,dp$ (voyez le n°. 79), on verra facilement que S. $dx.\sqrt{(1-yy)}=x\sqrt{(1-yy)}+$ S. $\frac{xy\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$.

$\text{S.}\frac{y\,dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}} = \frac{1}{c}\sqrt{(a+by+cyy)}$

$-\frac{b}{2c}\,\text{S.}\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$, comme il eſt aiſé de le voir en différenciant. De même $\text{S.}\frac{x\,dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$

$=\text{S.}\frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} = \frac{1}{c}\sqrt{(a+bx+cxx)}$

$-\frac{b}{2c}\,\text{S.}\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$; donc faiſant ces ſubſtitutions dans l'équation H, effaçant ce qui ſe détruit, on aura cette équation algébrique $x\sqrt{(a+by+cyy)}$

$-\frac{b}{2c}\sqrt{(a+bx+cxx)} = y\sqrt{(a+bx+cxx)}$

$-\frac{b}{2c}.\sqrt{(a+by+cyy)}+\text{C}$, ou bien $\left(x+\frac{b}{2c}\right)\times$

$\sqrt{(a+by+cyy)} = \left(y+\frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+bx+cxx)}+\text{C}$,

qui eſt l'intégrale de l'équation propoſée. Il eſt bon de faire attention à cette méthode ingénieuſe que nous devons au célèbre M. de La Grange.

L'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+exxx+fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$ dont aucun des membres n'eſt intégrable algébriquement a néanmoins une intégrale algébrique exprimée en général par l'équation $\text{A}+\text{B}(x+y)+\text{C}(xx+yy)+\text{D}xy+\text{E}(xxy+xyy)+\text{F}xxyy=0$. En effet ſi on différencie cette équation, il vient $\left[\text{B}+2\text{C}x+\text{D}y+\text{E}(2xy+yy)+2\text{F}xyy\right]dx+\left[\text{B}+2\text{C}y+\text{D}x+\text{E}(2yx+yy)\right.$

$+2Fyxx\Big]dy=0$; mais en tirant de la même équation la valeur de x en y, & enſuite celle de y en x, on trouvera $2x(C+Ey+Fyy)+B+Dy+Eyy=\sqrt{\Big[(B+Dy+Eyy)^2-4(A+By+Cyy)\times(C+Ey+Fyy)\Big]}$. Et de même $2y(C+Ex+Fxx)+B+Dx+Exx=\sqrt{\Big[(B+Dx+Exx)^2-4.(A+Bx+Cxx)(C+Ex+Fxx)\Big]}$; de ſorte qu'en faiſant $a=BB-4AC$; $b=2BD-4(AE+BC)$; $c=2BE+DD-4(AF+CC+BE)$; $e=2DE-4(BF+CE)$; $f=EE-4CF$, on aura $dx\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}=dy\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}$; & par conſéquent

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}},$$

qui eſt l'équation propoſée. Mais par ce que les coefficiens donnés a, b, c, e, f ne ſont qu'au nombre de cinq, & que les quantités A, B, C, D, E, F ſont au nombre de ſix, il eſt évident qu'il en reſtera une indéterminée qui tiendra lieu de la conſtante arbitraire qui doit ſe trouver dans l'intégrale complette de l'équation propoſée. Nous allons maintenant donner une méthode directe pour intégrer les équations qui ont la forme de celles dont on vient de parler, elle eſt fondée ſur le principe ſuivant.

PRINCIPE. *Quand on a une équation du premier ordre dont on ne peut trouver l'intégrale, il faut la différencier & examiner ſi en combinant cette nouvelle équation avec la propoſée, on pourroit trouver une équation intégrale du premier degré autre*

autre que la proposée ; car alors en chassant, par le moyen de ces deux équations les premieres différences, on aura l'intégrale cherchée. Si l'intégration ne réussit pas de cette maniere, on passera à la différentielle du troisieme degré & l'on cherchera si l'on peut parvenir à une nouvelle équation du second degré ; en ce cas il n'y aura plus qu'à éliminer les différences secondes & troisiemes par le moyen de l'équation proposée & de sa différentielle, & ainsi de suite.

Reprenons l'équation $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy)}}$, je fais l'un & l'autre membre $= dt$, & je quarre, il vient $dt^2 = \frac{dx^2}{a+bx+cxx}$, $dt^2 = \frac{dy^2}{a+by+cyy}$; donc $\frac{dx^2}{dt^2} = a+bx+cxx$, & $\frac{dy^2}{dt^2} = a+by+cyy$. Je différencie maintenant ces équations en supposant dt constant, & divisant la premiere par dx & la seconde par dy, il viendra $\frac{2ddx}{dt^2} = b+2cx$; $\frac{2ddy}{dt^2} = b+2cy$. Ajoutant ces deux équations ensemble & faisant $x+y=p$, on aura l'équation $\frac{2ddp}{dt^2} = 2b+2cp$, laquelle étant multipliée par dp & ensuite intégrée, donne $\frac{dp^2}{dt^2} = C+2bp+cp^2$; d'où l'on tire $\frac{dp}{dt} = \sqrt{(C+2bp+cpp)}$. Mais $\frac{dp}{dt} = \frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{(a+bx+cxx)}+\sqrt{(a+by+cyy)}$. Donc on aura enfin $\sqrt{(a+bx+cxx)}+\sqrt{(a+by}$

$+cyy) = V\left[C + 2b(x+y) + c(x+y)^2\right]$

qui eſt l'intégrale complette de l'équation propoſée, & qui, quant au fond, ne differe pas de celle que nous avons trouvée ci-deſſus par une autre méthode.

Soit l'équation $\frac{dx}{V(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)} = \frac{dy}{V(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}$, je fais $\frac{dz}{t} = \frac{dx}{V(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}$, & $\frac{dz}{t} = \frac{dy}{V(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}$. Quarrant ces équations, multipliant enſuite par le dénominateur du ſecond membre & diviſant par $\frac{dz^2}{t^2}$, différenciant en regardant dz comme conſtant, diviſant la première par dx & la ſeconde par dy, & tranſpoſant, l'on aura $\frac{2tdtdx+2ttddx}{dz^2} = b+2cx+3ex^2+4fx^3$; $\frac{2tdtdy+2ttddy}{dz^2} = b+2cy+3ey^2+4fy^3$. J'ajoute enſemble ces deux dernières équations, & je fais $x+y=p$, $x-y=q$, & $dt = Mdp+Ndq$, j'aurai en diviſant par 2, $\frac{tMdp^2+tNdpdq+ttddp}{dz^2} = b+cp+\frac{3e}{4}(pp+qq)+\frac{f}{2}(p^3+3pq^2)$, & mettant au lieu de $\frac{dpdq}{dz^2}$ ſa valeur $\frac{dx^2-dy^2}{dz^2} = \frac{a+bx+cxx+ex^3+fx^4}{t^2} - \frac{a+by+cyy+ey^3+fy^4}{t^2}$

$$= \frac{bq + cpq + \frac{e}{4}(3ppq + q^3) + \frac{f}{2}(p^3q + pq^3)}{tt},$$

on aura, après avoir multiplié par t & ordonné les termes, on aura, dis-je, l'équation $\frac{tt(M\,dp^2 + t\,ddp)}{dz^2} =$ $(b + cp)(t - Nq) + \frac{e}{4}\left[3t(pp + q^2) - N(3p^2q + pq^3)\right]$ $+ \frac{f}{2}\left[t(p^3 + 3pq^2) - N(p^3q + pq^3)\right]$ .... (H). Supposons maintenant que t soit $= Nq$, ou que $t - Nq$ soit $= o$, & $N = P$, fonction de p sans q, nous aurons $dt = P\,dq + q\,dP$. Mais $dt = M\,dp + N\,dq = M\,dp + P\,dq$; donc $q\,dP = M\,dp$, & $M = \frac{q.\,dP}{dp}$. Donc l'équation H deviendra $\frac{PPq^3(dP\,dp + P\,ddp)}{dz^2} = Pq^3\left(\frac{e}{2} + fp\right)$, ou en divisant par Pq^3, $\frac{P\,dp.\,dP + PP\,ddp}{dz^2} = \frac{e}{2} + fp$. Si l'on multiplie cette équation par $2\,dp$, elle deviendra intégrable, & son intégrale sera à cause de dz constant, sera, dis-je, $\frac{PP\,dp^2}{dz^2} = C + ep + fp^2$; donc $\frac{P\,dp}{dz} = \sqrt{(C + ep + fp^2)}$; mais $\frac{dp}{dz} = \frac{dx + dy}{dz} = \frac{\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)}}{t} + \frac{\sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)}}{t}$; Donc substituant cette valeur, mettant à la place de p, $x + y$, & à la place de t, Pq, ou bien $P(x - y)$, on aura, après avoir multiplié par $x - y$, l'équation $\sqrt{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)} + \sqrt{(a + by + cyy + ey^3 + fy^4)} =$

$(x-y).\sqrt{\left[C+e(x+y)+f(x+y)^2\right]}$, qui eſt l'intégrale cherchée. Si l'équation propoſée étoit $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}=0$, on n'auroit qu'à changer dans l'intégrale qu'on vient de trouver, le ſigne du radical $\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}$.

Les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}$, & $\int\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cyy+ey^3+fy^4)}}$ n'appartiennent ni aux logarithmes, ni aux arcs de cercle; & on doit les rapporter à un genre de tranſcendantes entierement inconnu.

On doit donc conclure de ce qui précéde qu'il peut très-ſouvent arriver qu'une équation ſéparée dont auçun des membres n'eſt intégrale algébriquement, ni par les logarithmes, ni par les arcs de cercle, ait cependant une intégrale algébrique. Nous reprendrons cette matière importante dans la ſeconde partie de cette ſection.

FIN DU TOME IV.

Fig. 5.

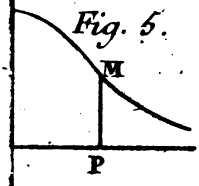


Fig. 6

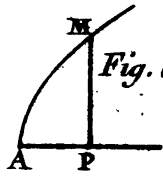
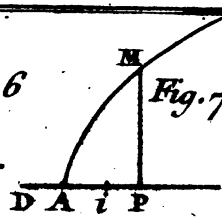


Fig. 7.



4.

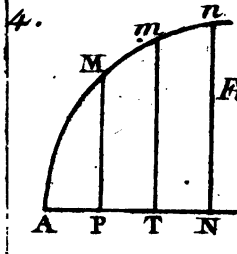


Fig. n

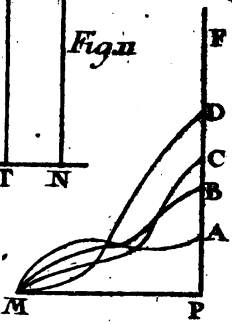


Fig. 10.

Fig. 16.

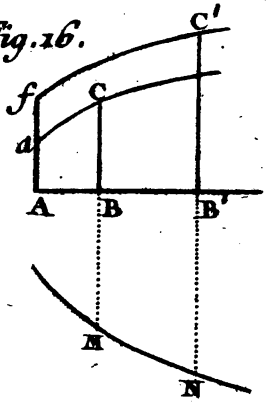


Fig. 12.

A	K		B
E	$+y$ R	$1 - 2x + xx$	F
	$+y$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ &c.	
	$+xy$ S	$+xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5$ &c.	
P			Q
	Somme N	$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5$ &c.	
L			M
C	$y =$	$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c.	D
	H		

Fig. 15.

	K		B
	R	$+2x \quad +3 \quad -\frac{4}{x} \quad +\frac{1}{xx}$	F
$+\frac{y}{xx}$	S	$+1 \quad +\frac{4}{x} \quad -x^3 \quad +\frac{1}{2x4}$ &c.	Q
Somme	N	$+2x \quad +4 \quad +0 \quad +\frac{1}{xx} \quad -\frac{1}{x3} \quad +\frac{1}{2x4}$ &c.	M
$y =$		$xx \quad +4x \quad +0 \quad -\frac{1}{x} \quad +\frac{1}{2xx} \quad -\frac{1}{6x^3}$ &c.	D
	H		

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans ce Volume.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

SECTION II. Page 1
Des Uſages du Calcul Intégral dans la Géométrie, Ibid.
De la Rectification des Courbes, 61
De la Cubature des Solides & de la Quadrature de leur ſurface, 79
Du Centre de Grandeur, ou *du Centre de Gravité des Figures*, 102
De la Méthode Inverſe des Tangentes, 131
Application du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral aux Courbes à double Courbure, 149

SECTION III.

De l'Intégration des Formules Différentielles, & des Équations Différentielles.

PREMIERE PARTIE DE LA TROISIEME SECTION. Page 159

De l'Intégration par les Séries, 173

Uſage des Quadratures & des Rectificaïons des Courbes dans le Calcul Intégral, 178

Ramener dans certains cas l'Intégration d'une Formule Différentielle à celle d'une autre Formule Différentielle plus ſimple, 194

Des Formules Différentielles dont l'Intégrale dépend du Cercle, 199

Des Quantités imaginaires, 201

De l'Intégration des Formules Logarithmiques, 212

Des Formules qui renferment la différence d'un Arc Circulaire, ou *du Logarithme hiperbolique ſimple, multipliée ou diviſée par des Sinus & des Co-ſinus*, 222

De l'Intégration des Fractions Rationnelles, 239

Des Formules Différentielles dont l'Intégrale dépend de la Rectification de l'Ellipſe ou de l'Hiperbole, ſéparément ou enſemble, 260

De l'Intégration des Formules Différentielles de tous les Ordres, & de celles qui ſont affectées de Signes d'Intégration, en ſuppoſant qu'il n'y ait qu'une Variable dans chaque Différentielle, ou s'il y a deux Différentielles dans la même Formule que l'une des deux ſoit Conſtante, 269

De l'Intégration des Différentielles à plusieurs Variables, Page 280

De ce qu'on peut faire lorsqu'il y a trop de difficulté pour trouver le facteur qui doit rendre complette une Équation Différentielle, 322

De la Méthode de M. Newton d'intégrer par les Séries les Équations Différentielles qui contiennent plusieurs Variables dans leurs termes, avec les Différences de ces Variables élevées à des Puissances quelconques, 324

De la séparation des Variables dans les Équations Différentielles, 335

De la demi-Séparation des Indéterminées & de quelques autres Méthodes de Calcul Intégral, 363

Des Intégrales particulieres des Équations Différentielles, 385

De la Construction Géométrique des Équations Différentielles, 392

De l'Intégration des Différentielles des Ordres Supérieurs, 394

De quelques Méthodes pour intégrer ou pour réduire aux Ordres Inférieurs les équations Différentielles des Ordres Supérieurs, lorsqu'elles ont certaines Conditions, 438

De quelques Méthodes d'intégrer certaines Équations, 492

Fin de la Table du Tome IV.

DE L'IMPRIMERIE
De la VEUVE BALLARD, rue des Mathurins, 1774.